

Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

Didaktika výuky hyperbolických funkcí pro střední školy

Didactics of teaching hyperbolic functions  
for secondary schools

Bc. Dalibor Kokeš

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a  
střední školy – matematika

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.

2015

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, a že všechny použité prameny a literatura byly řádně citovány. Dále prohlašuji, že tato diplomová práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu. Na základě přílohy č. 3 k Opatření děkana č. 8/2015 dále prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Didaktika výuky hyperbolických funkcí pro střední školy* vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury.

V Krásné Lípě dne 19. července 2015

Bc. Dalibor Kokeš

## **Poděkování**

Děkuji panu profesorovi RNDr. Ladislavu Kvaszovi, Dr. za vedení této diplomové práce a za cenné rady, které mi pomohly při jejím vytváření. Dále děkuji Gymnáziu Rumburk za možnost realizovat projekt, který je popisován v této práci.

## **Abstrakt**

Hyperbolické funkce a jejich inverze se v českých středoškolských kurzech matematiky probírají jen velmi zřídka. Je to škoda: toto učivo skýtá možnost zopakovat metody a dovednosti probírané u funkcí polynomických, racionálních, goniometrických a exponenciálních.

Navíc jde o skupinu funkcí, která nenápadně propojuje exponenciální a goniometrické funkce.

Účelem této práce je poskytnout variantu výuky tohoto tématu na běžné střední škole, a to ve velmi omezené časové dotaci. Takový kurz byl prakticky ověřen ve skutečné skupině žáků na malé české střední škole v pohraničí. Práce dále naznačuje možnosti rozšíření takového kurzu, pokud by se realizoval v širší hodinové dotaci nebo ve skupině pokročilejších žáků.

## **Klíčová slova**

funkce, hyperbolické funkce, didaktika výuky funkcí



## **Abstract**

It is very unlikely to see at Czech high school in mathematics classes teaching the hyperbolic functions and their inverses. It's a pity, this could be a great opportunity to review and refresh the polynomial, rational, trigonometric and exponential function methods and skills.

These functions even set an implicit connection between the exponential and gonio-metric functions, too.

The aim of this thesis is to offer an alternative to the usual practice at the ordinary high schools and it is adopted to a limited schooling time available. Our approach has been successfully tested with a group of students at a small high school in the Czech borderland. The thesis also indicates the potential to expand this approach if more schooling time should have been available or more talented students should have been involved.

## **Keywords**

functions, hyperbolic functions, teaching of functions

---

# Obsah

Úvod.....	9
1 Historie hyperbolických funkcí .....	13
1.1 Od řetězovky k objevu hyperbolických funkcí .....	13
1.2 Historie názvu třídy hyperbolických funkcí.....	14
1.3 Historie značení hyperbolických a hyperbolometrických funkcí .....	15
2 Proč učit zrovna hyperbolické funkce? .....	17
2.1 Přehled motivů .....	17
2.2 Motivace žáků a souvislost s látkou základního kurzu matematiky.....	17
2.2.1 Řetězovka v architektuře .....	18
2.2.2 Hyperbolické funkce v souvislosti se základním kurzem matematiky .	20
3 Zápisy a symbolika .....	24
3.1 Značení a symbolika zavedená a použitá v této práci.....	24
3.2 Odchylky a jiné verze symboliky.....	31
3.3 Značení a symbolika v programu Geogebra.....	32
3.4 Přehled současného používaného značení hyperbolických funkcí.....	32
4 Prostředky výukového kurzu .....	35
4.1 Organizace výuky.....	35
4.1.1 Softwarové prostředky .....	35
4.1.2 Výroba šablon hyperbolických funkcí .....	36
4.1.3 Žákovské prezentace a referáty jako forma výuky .....	41
4.2 Návrh učebního textu.....	41
4.2.1 Opakování: Definice goniometrických funkcí.....	42
4.2.2 Definice základních hyperbolických funkcí.....	43
4.2.3 Inverzní relace a funkce k funkcím hyperbolickým.....	46
4.2.4 Odvozené hyperbolické a hyperbolometrické funkce.....	48
4.2.5 Grafické řešení rovnic a nerovnic .....	62
5 Příprava a realizace kurzu.....	66

---

5.1	První hodina.....	66
5.2	Druhá hodina .....	71
5.3	Třetí hodina .....	73
5.4	Čtvrtá hodina .....	74
5.5	Pátá hodina.....	76
5.6	Šestá hodina.....	77
5.7	Sedmá hodina .....	79
5.8	Osmá hodina .....	82
5.9	Devátá hodina .....	82
5.10	Desátá hodina.....	82
5.11	Jedenáctá hodina.....	84
5.12	Dvanáctá hodina.....	84
5.13	Třináctá hodina .....	85
5.14	Čtrnáctá hodina.....	85
5.15	Poznámky po realizaci kurzu.....	85
6	Evaluace výuky .....	88
6.1	První prověrka .....	88
6.2	Druhá prověrka.....	91
6.3	Třetí prověrka.....	92
6.4	Čtvrtá prověrka.....	93
6.5	Závěrečná písemná práce.....	99
6.6	Zjištění.....	104
6.7	Zhodnocení evaluace.....	105
7	Další možnosti pokračování kurzu .....	108
7.1	Infinitezimální počet hyperbolických a hyperbolometrických funkcí .....	108
7.2	Práce se vzorci; vztahy mezi hyperbolometrickými či hyperbolometrickými funkcemi.....	111
7.3	Praktické aplikace .....	113
7.3.1	Rovnice hyperboly vyjádřená hyperbolickými funkcemi.....	114

---

7.3.2	Padání tělesa ve vzduchu.....	114
7.3.3	Kulička v rotující trubce .....	116
7.3.4	Řetězovka.....	117
7.3.5	Trajektorie povozu (křivka traktrix) .....	118
7.3.6	Klouzání řetízku.....	120
7.3.7	Ionizace plynu.....	121
7.3.8	Množení bakterií.....	122
7.3.9	Obvod s impedancí .....	123
7.4	Shrnutí.....	126
8	Závěr .....	127
9	Seznam použitých informačních zdrojů .....	129
10	Seznam obrázků .....	131
11	Seznam tabulek .....	134
12	Seznam příloh .....	135
12.1	Elektronické přílohy.....	135
12.2	Papírové přílohy.....	136

## Úvod

Tato diplomová práce se věnuje možnosti využití tématu hyperbolických funkcí při výuce matematiky na středních školách, a to za účelem procvičení a zopakování znalostí a metod, se kterými se žáci běžně setkávají u funkcí polynomických, racionálních, goniometrických či exponenciálních v základním kurzu středoškolské matematiky. Hyperbolické funkce a jejich inverze, které se nazývají hyperbolometrické, nejsou obvyklou součástí českých středoškolských kurzů matematiky. Toto téma má však značný potenciál z didaktického hlediska a to nejen z pohledu motivace žáků, ale především díky tomu, že hyperbolické funkce nabízejí mnoho příležitostí, jak vhodně sjednotit znalosti žáků týkající se funkcí, inverzí funkcí a také inverzních relací. Toto ne zcela tradiční téma nabízí možnost zabývat se také velmi důležitou, ne-li nejdůležitější aplikací související s funkcemi, kterou je grafické řešení rovnic a nerovnic. Domníváme se, že navíc přímá souvislost hyperbolických funkcí s goniometrickými a exponenciálními funkcemi představuje vhodné zastřešení tématu funkcí.

Vzhledem k tomu, že hyperbolické a hyperbolometrické funkce jsou z pohledu didaktického potenciálu často neprávem opomíjeny, rozhodli jsme se pro sepsání této práce, která bude nabízet méně tradiční pohled na využití hyperbolických funkcí ve výuce matematiky.

Hlavním cílem této diplomové práce je navrhnout, ověřit a poskytnout variantu výuky tohoto tématu ve velmi omezené časové dotaci pro běžné střední školy tak, aby kurz věnovaný hyperbolickým funkcím mohl být znovu a lépe realizován kdykoli v budoucnu. V případě potřeby by pak mohl být takový kurz přizpůsoben aktuálním požadavkům, které na něj mohou být kladeny. V práci dále naznačujeme možnost pokračování kurzu pro případ, že by ho bylo možné realizovat v souvislosti s infinitezimálním počtem jako jeho aplikaci.

Práce je koncipována tak, že nejprve v kapitole 1 poskytujeme krátký historický vhled do problematiky hyperbolických funkcí a to na středoškolské úrovni. V této kapitole přinášíme také společně s kapitolou 3 přehled historického vývoje značení hyperbolických funkcí, který upozorňuje na rozpolcenost odborné veřejnosti v otázce značení hyperbolických funkcí a hyperbolometrických funkcí. Naproti tomu v kapitole 2 se zabýváme motivační složkou celého tématu hyperbolických funkcí a to tak, že není předpokládána znalost terminologie hyperbolických funkcí, takže myšlenky obsažené v kapitole 2 lze využít například i v úvodu do tématu za předpokladu větší časové dotace tématu. Podstatné je, že učitel by si měl být vědom myšlenek obsažených právě v této kapitole 2 a ve vhodnou chvíli je využít. Do značné míry upozorňuje tato část práce také na konkrétní skutečnosti, které by si žáci měli uvědomit a rozumět jim v souvislosti s cílem opakovat a procvičovat látku, která se učí v základním kurzu matematiky.

V kapitole 4 představujeme prostředky výukového kurzu, které jsou nosnými prvky celé koncepce výuky našeho tématu. Ukazujeme například, jak jsme si poradili s problémem vytvoření šablon hyperbolických funkcí a uvádíme učební text pro středoškoláky, ve kterém představujeme téma hyperbolických funkcí formou doplňkového materiálu, u kterého předpokládáme, že by měl být žákům k dispozici a přispět k lepšímu porozumění tématu hyperbolických funkcí. Nejde o metodický materiál ve smyslu klasické učebnice; spíše se snažíme, aby méně pozorný nebo nepřítomný žák měl kam nahlédnout. Tato kapitola předchází kapitole 5, ve které představujeme plánovanou náplň kurzu členěnou do čtrnácti vyučovacích hodin. K celé koncepci vytvořeného výukového kurzu poskytujeme materiály jak pro samotnou výuku, tak i zadání prověrek a písemných prací pro ověření zvládnutí dovedností, které jsme na tématu chtěli procvičovat. Celá navrhovaná koncepce výuky včetně prověrek prošla procesem evaluace v prostředí menší střední školy v pohraničí.

V kapitole 6 se zabýváme zhodnocením žakovských, především písemných výstupů z tohoto tématu a zhodnocením a shrnutím důležitých zjištění, které jsme analýzou prověrek a závěrečné písemné práce v průběhu evaluace získali.

V kapitole 7 se zabýváme možnostmi, které dané téma nabízí v souvislosti s infinitezimálním počtem a algebrou vzorců. Tyto možnosti jsme však v reálné výuce neověřovali. Touto kapitolou rozvíjíme myšlenku na možné pokračování tohoto kurzu. V této části práce se navíc věnujeme praktickým ukázkám využití hyperbolických funkcí v praxi. Některé aplikace a konkrétní příklady vycházejí ze zajímavé ruské publikace A. R. Janpolského (Janpolskij 1960), která se věnuje nejen aplikacím hyperbolických funkcí.

Nabízejí se tři cesty pro pokračování kurzu, kterými jsou:

- a) klasické procvičování výpočtu limit, formálního derivování, výpočtu primitivních funkcí, výpočtu obsahů rovinných obrazců a objemů těles.
- b) téma Hyperbolické a hyperbolometrické vzorce; odvození vztahů mezi těmito funkcemi a práce s takto získanými vzorci podobně, jako se po probrání goniometrických funkcí probírají goniometrické vzorce.
- c) vyprávění o tom, kde všude je vhodné výsledky vyšší matematiky, zejména u problémů řešených diferenciálními rovnicemi, vyjádřit touto třídou funkcí; propočítání těchto aplikací ovšem na střední škole nepředpokládáme.

V závěru této diplomové práce se může čtenář seznámit se shrnutím zastřešujícím tuto prakticky orientovanou diplomovou práci a to konkrétně s připomínkami k výsledné realizaci představené v této práci, k jejím výstupům, a také je zde uveden pohled autora práce do budoucna týkající se představené koncepce výuky a samotného tématu.

Stěžejním obsahem příloh je prezentace, soubory vytvořené ve výukovém programu Geogebra, materiály k realizaci kurzu a program pro zobrazování funkcí v MS

---

Excelu, které byl využit k přípravě materiálu k vlastní realizaci koncepce výuky předložené v této práci.



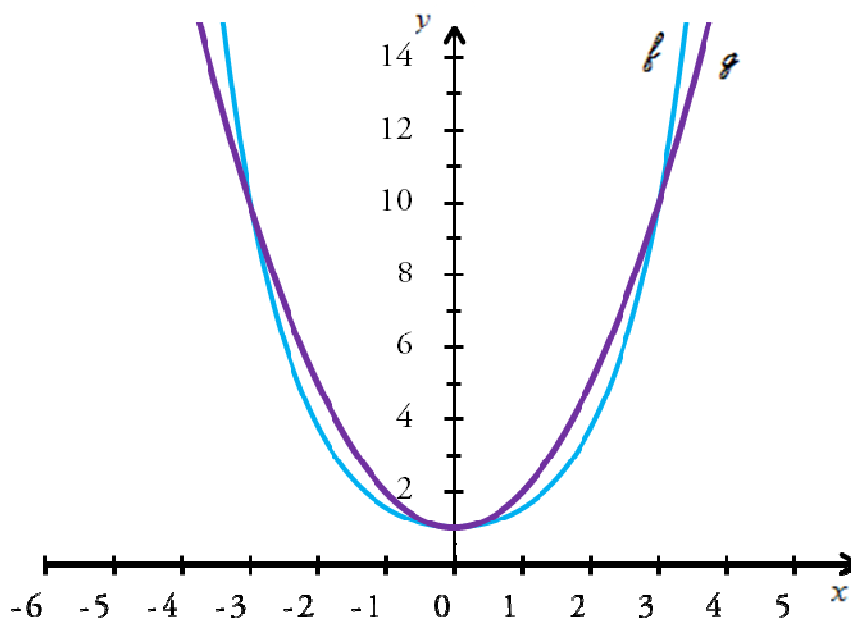
# 1 Historie hyperbolických funkcí

## 1.1 Od řetězovky k objevu hyperbolických funkcí

Naše vzrušující cesta historií začíná zhruba koncem 17. století. Jeden z mnoha problémů této etapy moderní matematiky zněl prostě: Matematicky vyjádřit a konstrukčně sestavit řetězovku (Barnett 2004, s. 15).

Mějme obvyklý, třeba železný, řetěz. Jeho konce upevníme ve stejné výšce nad vodorovnou rovinou. Účinkem homogenního tíhového pole se řetěz prohne. Tvar prověšeného řetězu je matematickou křivkou – řetězovkou, připomínající konvexní parabolu.

Například Galileo míní, že řetězovka je totožná s parabolou. Jak se později ukázalo, není tomu tak. Porovnáním grafického výsledku řetězovky s parabolou na první pohled zjišťujeme, že to nejsou křivky totožného tvaru (viz Obr. 1.1).<sup>1</sup> Přesto mají parabola a řetězovka mnoho společného v souvislosti s aplikacemi, ve kterých se s těmito křivkami můžeme setkat všude kolem nás.



Obr. 1.1: Graf funkcí  $f : y = \cosh x$  (řetězovka) a  $g : y = x^2 + 1$  (parabola)

<sup>1</sup> Těto problematice se podrobněji věnujeme v kapitole 2.

Je nutno rozlišit 3 problémy:

- a) jak řetězovku geometricky sestavit
- b) jak napsat rovnici řetězovky
- c) jak tento zápis řetězovky učinit přehledným, stručným a elegantním

V roce 1691 byly publikovány v *Acta Eruditorum* tři způsoby, jak zkonstruovat řetězovku, jejichž autory byli Johann<sup>2</sup> Bernoulli, Gottfried Wilhelm Leibniz a Christiaan Huygens (Barnett 2004, s. 15). Vyjádření řetězovky rovnicí pomocí exponenciálních funkcí vychází ze zmiňované práce Leibnize z roku 1691, i když v ní není vztah explicitně uveden a odvozen (Kacmarynski 1931, s. 1). Leibniz však ukázal, že řetězovka nepatří mezi závislosti polynomické (parabola je z hlediska algebry kvadratický mnohočlen), ale mezi závislosti exponenciálního typu, ovšem její algebraický tvar je dosti netriviální.

## 1.2 Historie názvu třídy hyperbolických funkcí

Trvalo zhruba dalších 70 let, než Vincenzo Riccati a po něm Johann Heinrich Lambert zavedli nové značení pro vyjádření hyperbolických funkcí a dále příslušnou terminologii, o čemž pojednává následující oddíl 1.3.

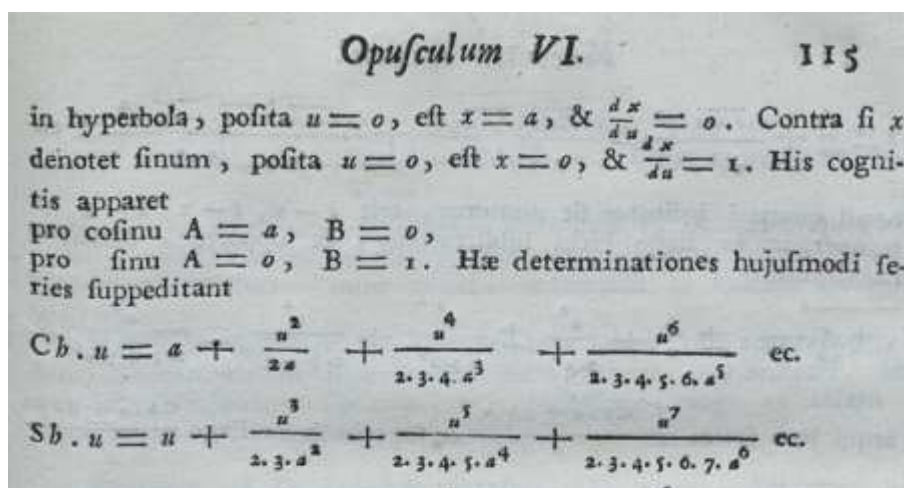
Nezávisle na řešení problému řetězovky ukázal Lambert roku 1761 v *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques*, co se stane, když jednotkovou kružnici v definici sinu a kosinu nahradíme rovnoosou jednotkovou hyperbolou, jak vyplývá z tezí Lambertovy práce uvedených v (Barnett 2004, s. 21). Dostaneme tak funkce, které plným právem nazveme hyperbolické. Při pokusu vyjádřit je matematickou rovnicí s překvapením zjistíme, že výsledkem je stejná či velmi podobná závislost jako pro rovnici řetězovky.

---

<sup>2</sup> Jeho starší bratr Jacob předpokládal stejně jako Galileo, že řetězovka je parabola, a to až do roku 1691.

### 1.3 Historie značení hyperbolických a hyperbolometrických funkcí

Stěžejní význam pro zavedení a vznik terminologie hyperbolických funkcí znamenala 2. polovina 18. století. V této době v rozmezí let 1757 až 1762 publikuje italský matematik Riccati knihu s názvem *Opusculorum Ad res Physicas et Mathematicas pertinentium* (Riccati 1757, s. 114–115). V této knize poprvé zavádí Riccati hyperbolické funkce a označuje je jako „*sinus hyperbolico*“ a „*cosinus hyperbolico*“ (Barnett 2004, s. 27).<sup>3</sup> Riccati používal značení „Sh.“ a „Ch.“ pro hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus viz Obr. 1.2 (zdroj: *Opusculorum Ad res Physicas et mathematicas pertinentium*).



Obr. 1.2: Riccatiho značení hyperbolických funkcí

Toto značení, ač mírně modifikované<sup>4</sup>, je typické pro některé země jako je Francie a Rusko, kde se s ním lze setkat v učebnicích přesto, že v dnešní době se využívá z celosvětového pohledu převážně značení „sinh“ a „cosh“, jehož autorství je připisováno Lambertovi. Jeho první vývojové stádium lze nalézt například v Lambertově článku *Observations trigonometriques* z roku 1768 přetisknutém v *Histoire de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres* (Lambert 1770, s. 327–352). Ve zmiňovaném článku používá Lambert Riccatiho názvosloví pro hyperbolické funkce

<sup>3</sup> v českém překladu sinus hyperbolický a kosinus hyperbolický.

<sup>4</sup> V dnešní době se používá pro kosinus hyperbolický „sh“ a kosinus hyperbolický „ch“ tj. psané malými písmeny a bez tečky mezi názvem funkce a jejím argumentem.

(tj. názvy sinus a kosinus hyperbolický). Používá však značení „sin hyp“ pro sinus hyperbolický a „cos hyp“ pro kosinus hyperbolický. V této práci Lambert (1770, s. 337) také naznačuje možnost zkracovat značení hyperbolických funkcí, a to u funkce kosinus hyperbolický, kde uvádí zkrácenou formu značení „cos hyp“, a to konkrétně „cos h.“, viz Obr. 1.3 (zdroj: *Histoire de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres*).

$$\text{cor } a = \frac{\text{cof } B}{\text{cof h. } x} \cdot \text{fin hyp } (x - \gamma).$$

De cette maniere le calcul est réduit à une seule analogie, ou bien à la simple addition du logarithme constant de

$$\frac{\text{cof } B}{\text{cof hyp. } x}$$

Obr. 1.3: Lambertovo značení

Do dnešních dnů Lambertovo značení hyperbolických funkcí zaznamenalo značnou změnu, která spočívá v tom, že se píše „sinh“ a „cosh“ nikoli „sin hyp“, „cos hyp“, „sin h.“ ani „cos h.“<sup>5</sup> Je třeba zmínit, že rozdíly při značení hyperbolických funkcí v 19. a 20. století většinou souvisely s rozdílným značením goniometrických funkcí, které daní autoři používali. Za zmínku stojí také způsob značení goniometrické funkce tangens v 18. století, kterou mnoho autorů, například i Lambert (1770, s. 327–352) značí jako „tang“. Zde lze pravděpodobně hledat příčinu vývoje značení také hyperbolické tangenty, kdy někteří autoři v průběhu 19. a 20. století využívají pro značení funkce hyperbolický tangens různé modifikace „tanh“ a druzí různě modifikované značení „tgh“.

Lze obecně konstatovat, že historie značení hyperbolických funkcí byla výrazně ovlivněna nejednotností ve značení goniometrických funkcí a různými názory, do jaké míry způsob značení dané hyperbolické funkce zjednodušovat respektive zkracovat. Podobně lze shrnout situaci kolem značení hyperbolometrických funkcí, které je do dnešní doby nejednotné a hovoříme o něm v kapitole 3.

<sup>5</sup> Tečka mezi názvem funkce a proměnou se stejně jako u značení dle Riccatiho již nepoužívají.

## 2 Proč učit zrovna hyperbolické funkce?

### 2.1 Přehled motivů

Metodami a stylem práce připomínají hyperbolické funkce goniometrii, jejíž zopakování nikdy není na závalu.

Dají se zopakovat dovednosti a návyky probírané v předchozích tématech o funkcích (obory, výpisy, náčrtky a konstrukce grafů, vyčíslení na kalkulačce, grafické řešení rovnic a nerovnic).

Žáci si cvičí práci s dalším matematickým vnitřním jazykem; také si potřebují cvičit překladatelské dovednosti i mimo jazykové předměty; cvičí si přepis z jazyka exponenciálních funkcí do jazyka hyperbolických funkcí a naopak, vyhledávají přepisy v tabulkách vzorců; poznávají, že pro vyjádření některých problémů je jazyk hyperbolických a hyperbolometrických funkcí elegantnější a krásnější než jazyk exponenciál a logaritmů.

Konečně: opakování – matka moudrosti, aniž by se dobří žáci museli nudit tím, že berou znovu to, co už dávno znají.

### 2.2 Motivace žáků a souvislost s látkou základního kurzu matematiky

Tento oddíl se zabývá především otázkou motivace žáků k výuce tohoto tématu. Je určen především učiteli, aby vstup do tématu nepřipomínal pád ze skály, ale spíše malou procházku v podhůří horského masivu.

Uvádíme výčet několika využití a významu hyperbolických funkcí, které mohou posloužit jako vhodná motivace pro žáky v okamžiku, kdy není pojem hyperbolická funkce ještě zaveden. Další známější i méně známé aplikace, které souvisejí s elektroinženýrstvím a řešením různých problémů z matematiky, fyziky a dalších přírodních věd, jsou podrobněji popsány v kapitole 7, kde je již využito terminologie související s tématem hyperbolických funkcí a při řešení se využívá mírné znalos-

ti infinitezimálního počtu. Jednou z častých aplikací, kde se s hyperbolickými funkcemi můžeme setkat, je využití řetězovky v architektuře. Rovnici řetězovky lze snadno zapsat pomocí jedné z hyperbolických funkcí, kterou nazýváme hyperbolický kosinus.

### 2.2.1 Řetězovka v architektuře

Píše se rok 1418. V italském městě Florencie se stále řeší problém zastřešení florentského dómu kopulí na rozestavěné katedrále Santa Maria del Fiore, jejíž stavba započala již roku 1296 pod vedením architekta Arnolfa di Cambio.

Složitost tohoto problému spočívala především v rozměrech již rozestavěného dómu o rozpětí skoro 40 metrů, který měla kopule zastřešovat. Tak velký prostor totiž nebylo v podstatě možné zastřešit v té době známými konstrukčními technikami. Byla vypsána architektonická soutěž, kterou nakonec vyhrál se svým návrhem Filippo Brunelleschi.

Ten využil vlastnosti řetězovky dávno předtím, než se její existencí matematici začali zajímat. Princip využití řetězovky spočívá v tom, že tento typ konstrukcí je namáhán pouze na tah nebo na tlak a netrpí přílišným bodovým namáháním, ovšem pouze pokud je konstrukce ve tvaru řetězovky zatížena pouze vlastní vahou.



Obr. 2.1: Katedrála di Santa Maria del Fiore

Pro tyto své vlastnosti je tvar řetězovky vhodný k zastřešování rozsáhlých prostorů a objektů. Roku 1436 byla kopule na Katedrále di Santa Maria del Fiore dokončena, viz Obr. 2.1 (zdroj: <http://ontheedgeoffocus.com/2012/03/16/florence-italy-day-1/>). Brunelleschi se tak stal autorem jedné z nejvýznamnějších a nejvelkolepějších staveb v historii architektury, která předčila svoji dobu.

Známých staveb, využívajících obrácenou řetězovku, je velmi mnoho. Velmi proslulou stavbou, která využívá vlastností řetězovky, je monumentální 192 metrů vysoký oblouk Gateway Arch vyobrazený na Obr. 2.2 (zdroj: Google Street View), který byl postaven podle plánů architekta Eero Saarinen a inženýra Hannskari Bandela v letech 1963–1965 jako součást památníku Jefferson National Expansion Memorial ve městě St. Louis. Toto město se nachází v americkém státě Missouri a jeho historie sahá až do roku 1763, kdy bylo založeno francouzskými koloniálními obchodníky.

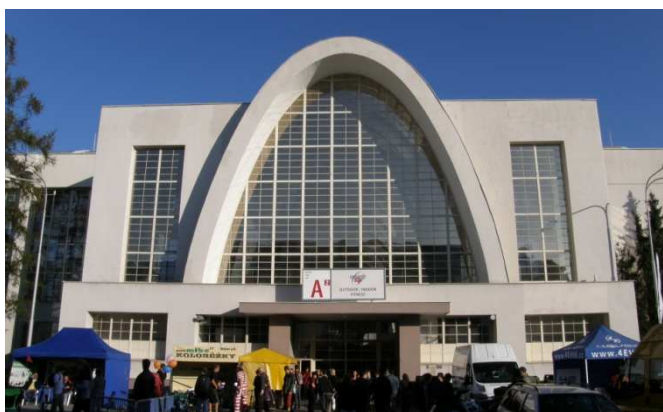


Obr. 2.2: Gateway Arch

Oblouk Gateway Arch připomíná historii města, které v minulosti hrálo velmi důležitou roli při osidlování západní části Spojených států. Proto bylo St. Louis nazýváno Bránou na západ, což také připomíná a symbolizuje dominantu celého města, monument, na jehož vrchol s vyhlídkovou plošinou se lze svézt kabinkami,

které jezdí po obou ramenech této stavby. Na vyhlídkové plošině si lze pak vychutnat výhled z nejvyšší národní kulturní památky ve Spojených státech amerických.

V České republice tvaru řetězovky odpovídá například Pávilon A na Brněnském výstavišti, jehož stavba započala v roce 1927 a byla dokončena za 14 měsíců v roce 1928 a to podle návrhu Josefa Kalouse z roku 1924. Pávilon je vyobrazený v dnešní podobě na Obr. 2.3 (zdroj: [www.mapio.cz](http://www.mapio.cz)).



Obr. 2.3: Brněnské výstaviště, Pávilon A

### 2.2.2 Hyperbolické funkce v souvislosti se základním kurzem matematiky

V oddílu 1.1 jsme hovořili o tom, co je řetězovka, a ukazovali jsme si, že se řetězovka sice podobá parabole, ale že její tvar je odlišný. Pro naši lepší představu si zopakujeme, co je to vlastně parabola. Parabola se svislou osou je grafem kvadratické funkce o rovnici  $y = kx^2 + lx + m$ . Naproti tomu řetězovku je možné definovat pomocí hyperbolické funkce jako  $y = \pm a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ ,<sup>6</sup> kde  $\cosh$  je kosinus hyperbolický a koeficient  $a$  znamená absolutní hodnotu  $y$ -ové souřadnice vrcholu řetězovky. Na malou chvíli se ještě vrátíme k nám známému obrázku (Obr. 1.1). Tento obrázek jsme si ukazovali proto, abychom si uvědomili, že parabola nemůže kopírovat křivku řetězovky.

<sup>6</sup> Proto o křivce vyjádřené rovnicí funkce  $y = \cosh x$  hovoříme jako o řetězovce (s koeficientem  $a = 1$ ).



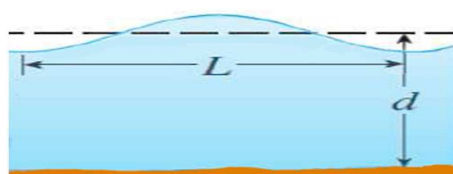
Grafem námi zvolené kvadratické funkce je ovšem parabola (Obr. 1.1). Řetězovka s koeficientem  $a$  rovným jedné protíná parabolu ve dvou bodech a obě křivky mají vrchol ve společném bodě. Kdybychom chtěli měnit parametry kvadratické funkce tak, abychom dosáhli u paraboly stejného tvaru, jako má řetězovka, mohli bychom měnit hodnoty koeficientů kvadratické funkce  $k$ ,  $l$  nebo  $m$ , ovšem změnou těchto koeficientů bychom dosáhli pouze toho, že by naše parabola buď neměla vrchol ve stejném bodě jako řetězovka, nebo bychom parabolu mohli změnou koeficientu zužovat a rozšiřovat. Takovýmto postupem se však průsečíky těchto dvou křivek budou posouvat či se nám křivky zcela přestanou protínat. Nikdy se nám ovšem grafy obou funkcí zcela nepřekryjí.

Na základní a střední škole jsme se určitě seznámili s různými druhy funkcí, jako jsou lineární, kvadratické, lineární lomené, logaritmické nebo exponenciální funkce. Zástupci každé z těchto tříd funkcí mají své charakteristické vlastnosti.

Jednou z charakteristických vlastností je tvar grafu funkce, díky kterému si nespoleteme křivku definovanou kvadratickou funkcí s křivkou odpovídající například exponenciální funkci. Jistě také dokážeme rozlišit například lineární od logaritmické funkce, které budou nakreslené do společného grafu. U zástupce ze třídy hyperbolických funkcí, konkrétně hyperbolického kosinu, jsme si ovšem ukazovali v oddílu 1.1, že má velmi podobný tvar jako kvadratická funkce. Tedy že křivka kosinu hyperbolického má velmi obdobný tvar jako parabola. Je to náhoda?

V minulosti možná mnozí z nás, když viděli nějakou křivku, která se podobala například tvaru lineární lomené funkce, kterou jsme znali, neuvažovala o tom, zda křivka je představitelem opravdu té či oné skupiny funkcí, se kterou jsme jí podvědomě spojovali. Snadněji se tak vžijeme do pozice Galilea nebo Jacoba Bernoulliho, který do poslední chvíle nevěřil svému mladšímu bratrovu Johannovi, že řetězovka není parabola. Nepředpokládal totiž, že existuje nějaká další skupina funkcí, které by byly tak hodně tvarově podobné v tomto případě kvadratickým funkcím.

Spoustu věcí kolem nás je možné popsat právě pomocí reprezentantů skupiny hyperbolických funkcí. Zmínit můžeme například rychlost oceánských vln. Rychlost ideálních oceánských vln je dána následujícím vztahem  $v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$ , kde  $L$  vyjadřuje délku vlny,  $g$  je tíhové zrychlení a  $d$  je střední vzdálenost vlny ode dna oceánu, což je znázorněno na Obr. 2.4 (Stewart 2015, s. 260).



Obr. 2.4: Oceánská vlna

Je však pravdou, že nejznámější hyperbolickou funkcí asi již navždy zůstane hyperbolický kosinus, a to především kvůli řetězovce, se kterou se setkáváme prakticky každý den například u vysokonapětového nebo trakčního vedení<sup>7</sup> (Obr. 2.5).



Obr. 2.5: Řetězovkové trakční vedení

Zajímavé je si uvědomit, že třída hyperbolických funkcí má jednu velmi neobvyklou vlastnost, se kterou jsme se setkali u polynomických funkcí. Hyperbolické funkce se totiž liší od ostatních tříd funkcí, s kterými se žáci na základní a střední škole ob-

<sup>7</sup> Při nezanedbatelném zatížení se z řetězovky nosného lana stává parabola.

vykle setkávají, tím,<sup>8</sup> že různí zástupci hyperbolických funkcí se svým tvarem a průběhem funkce podobají různým funkcím od kvadratických, přes lineárně lomené, až po logaritmické. I této skutečnosti vhodně využijeme v průběhu kurzu.

Považujeme za vhodné ještě jednou zdůraznit, viz oddíl 2.1, že právě na tomto pro žáky novém tématu se nabízí výborná možnost upevnit schopnosti žáků v oblasti funkcí, protože toto téma hyperbolických funkcí se sice jeví pro samotné žáky jako nové, ale nevyžaduje od žáků nové rozsáhlé znalosti z oblasti hyperbolických funkcí.

---

<sup>8</sup> S výjimkou polynomických funkcí, ač nejsou explicitně uvedeny v RVP a také v ŠVP většiny středních škol.

### 3 Zápisy a symbolika

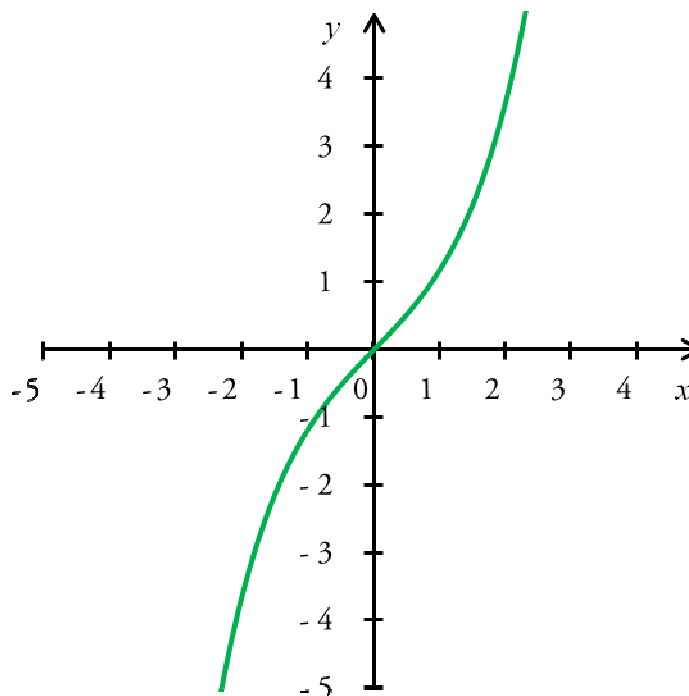
Hyperbolické a hyperbolometrické funkce se používají méně často, než řada jiných funkcí a relací. Proto není symbolika těchto objektů zdaleka sjednocená v různých zemích a dokonce ani mezi školami v téže zemi.

Nezbývá, než nejprve stanovit, jak budeme jednotlivé relace a funkce značit, a pro srovnání uvést jiné způsoby zápisů a značení.

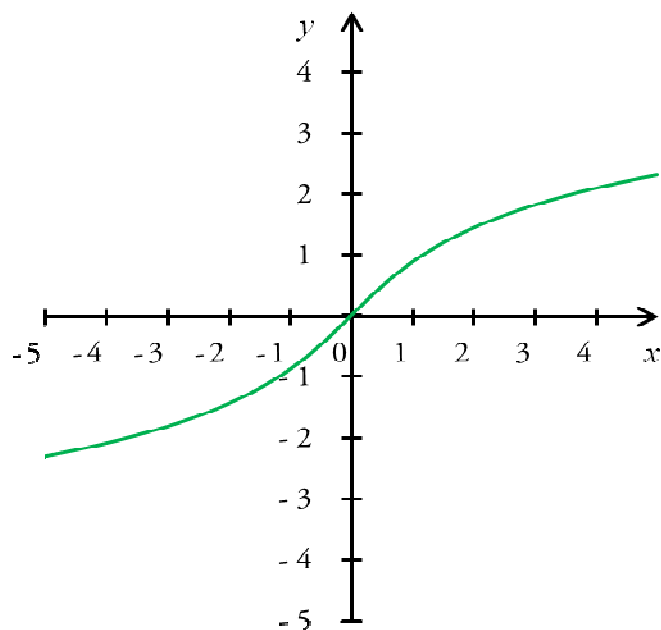
#### 3.1 Značení a symbolika zavedená a použitá v této práci

Funkce značíme na začátku malým písmenem; relace, které nejsou funkcemi, značíme na začátku velkým písmenem.

Funkci hyperbolický sinus budeme značit  $y = \sinh x$  (Obr. 3.1). Relaci, která je k ní inverzní, nazýváme argument hyperbolického sinu a značíme  $y = \operatorname{argsinh} x$  (Obr. 3.2). Tato relace je zároveň funkcí, proto ji značíme na začátku malým písmenem.

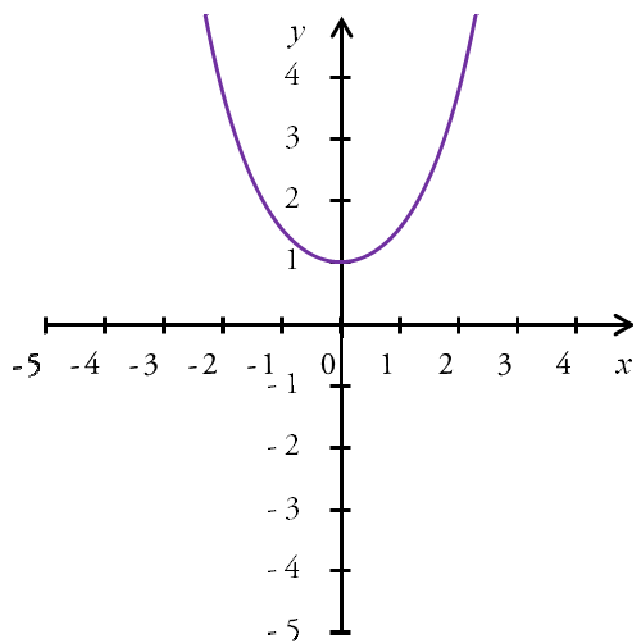


Obr. 3.1: Graf funkce sinus hyperbolický  $y = \sinh x$



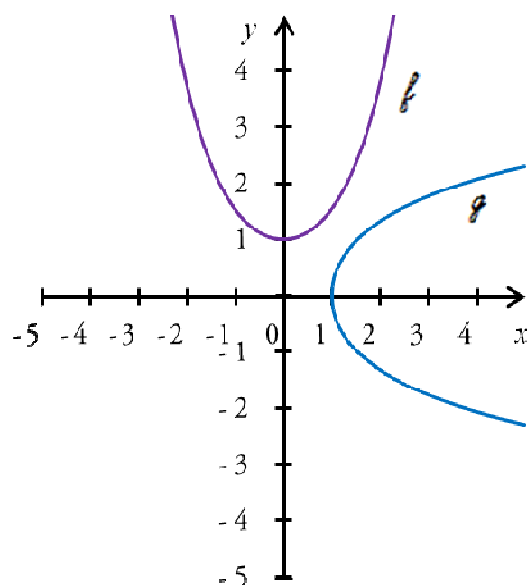
Obr. 3.2: Graf funkce argument sinu hyperbolického  $y = \operatorname{arsinh} x$

Funkci hyperbolický kosinus budeme značit  $y = \cosh x$  (Obr. 3.3). Relaci, která je k ní inverzní, nazýváme argument hyperbolického kosinu. Protože to není funkce, značíme ji  $y = \operatorname{Argcosh} x$  (Obr. 3.4).

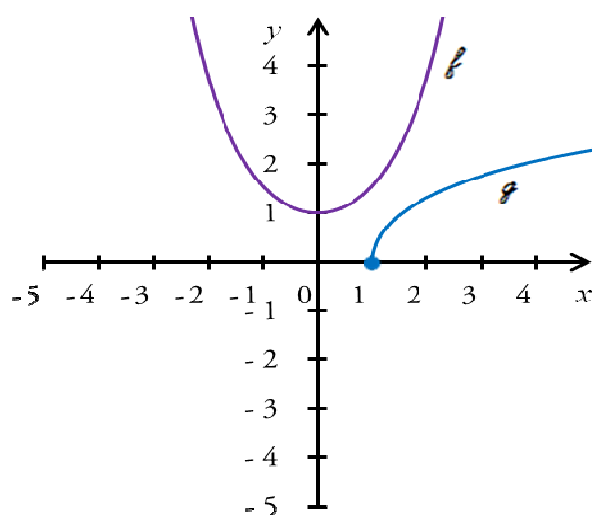


Obr. 3.3: Graf funkce kosinus hyperbolický  $y = \cosh x$

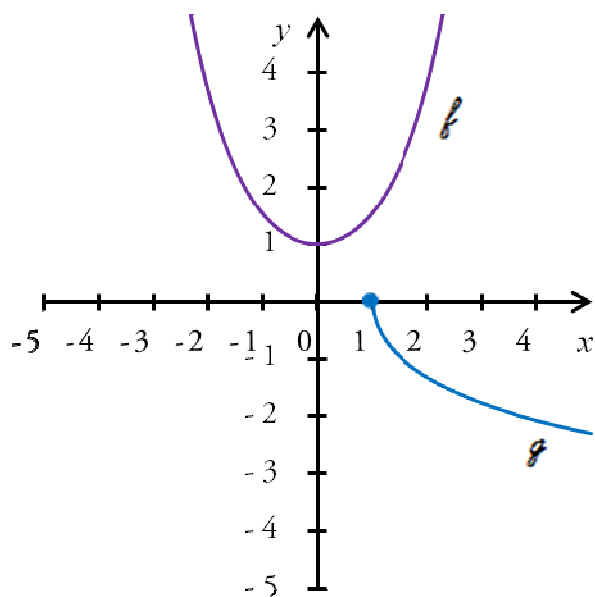
Podobně, jako se to dělá u inverze kvadratické funkce, lze tuto relaci rozdělit na dvě části, které již jsou funkce. Horní polovinu prohlásíme za inverzní funkci k hyperbolickému kosinu, nazveme ji argument hyperbolického kosinu a označíme ji  $y = \operatorname{argcosh} x$  (Obr. 3.5). Dolní polovina je také inverzní funkcí k hyperbolickému kosinu, má rovnici  $y = -\operatorname{argcosh} x$  (Obr. 3.6).



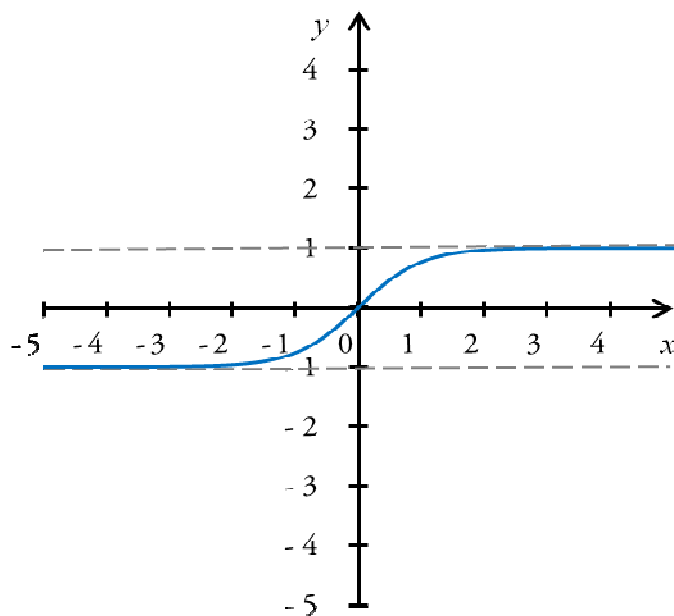
Obr. 3.4: Graf funkce  $f : y = \cosh x$  a k ní inverzní relace  $g : y = \operatorname{Argcosh} x$

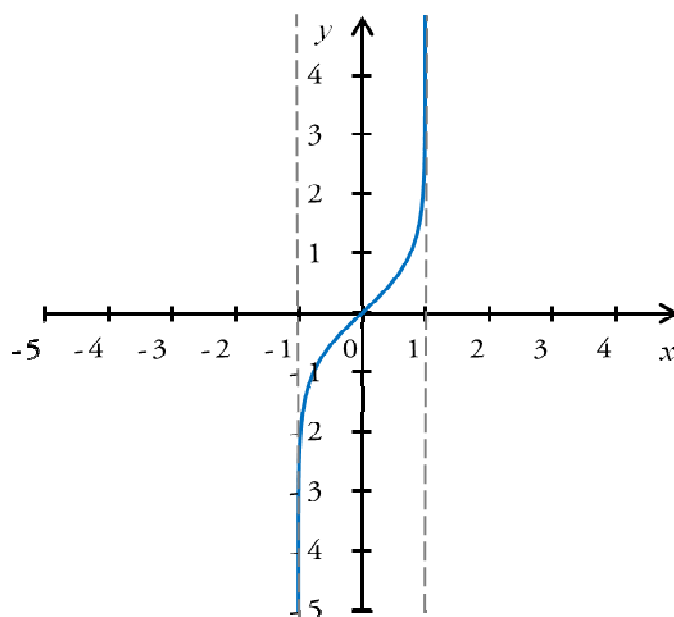


Obr. 3.5: Graf funkce argument hyperbolického kosinu  $g : y = \operatorname{argcosh} x$

Obr. 3.6: Graf funkce  $g : y = -\operatorname{argcosh} x$ 

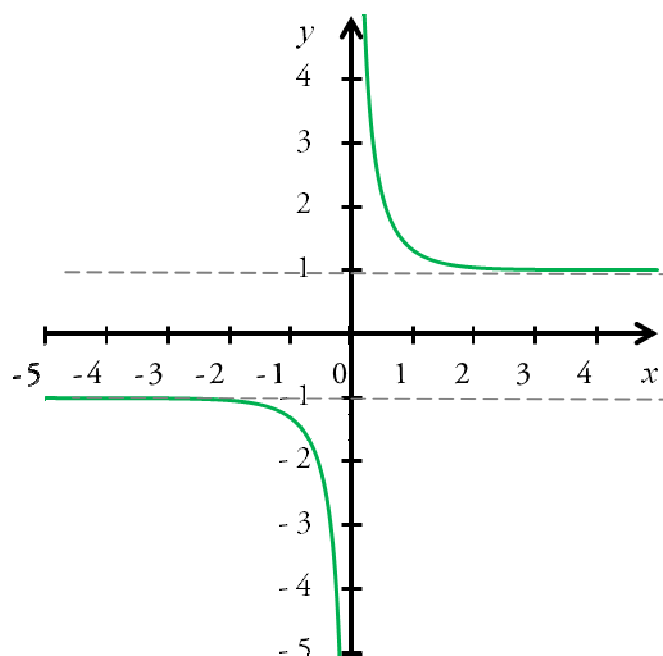
Funkci hyperbolický tangens budeme značit  $y = \operatorname{tgh} x$  (Obr. 3.7). Relaci, která je k ní inverzní, nazýváme argument hyperbolické tangenty, a protože je tato relace zároveň funkcí, značíme ji  $y = \operatorname{argtgh} x$  (Obr. 3.8).

Obr. 3.7: Graf funkce tangens hyperbolický  $y = \operatorname{tgh} x$



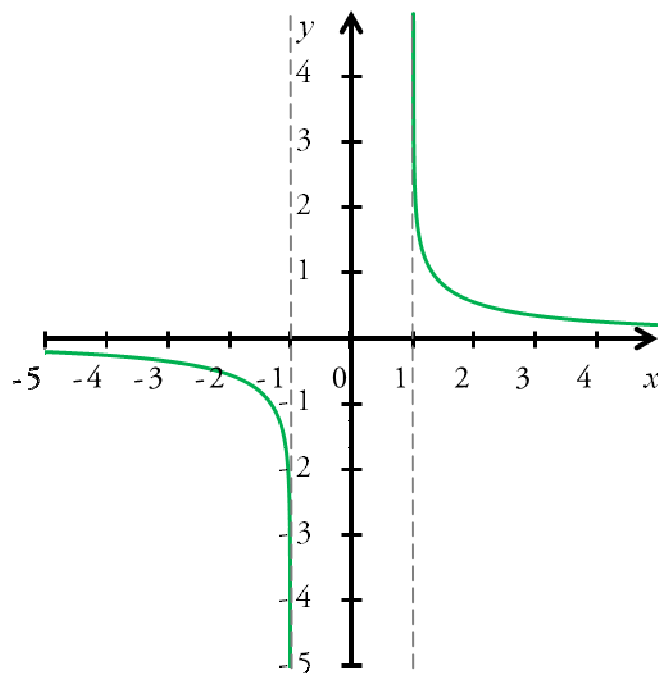
Obr. 3.8: Graf funkce argument tangenty hyperbolické  $y = \operatorname{arctgh} x$

Funkci hyperbolický kotangens budeme značit  $y = \operatorname{cotgh} x$  (Obr. 3.9). Relaci, která je k ní inverzní, nazýváme argument hyperbolické kotangenty, a protože je tato relace zároveň funkcí, značíme ji  $y = \operatorname{argcotgh} x$  (Obr. 3.10).



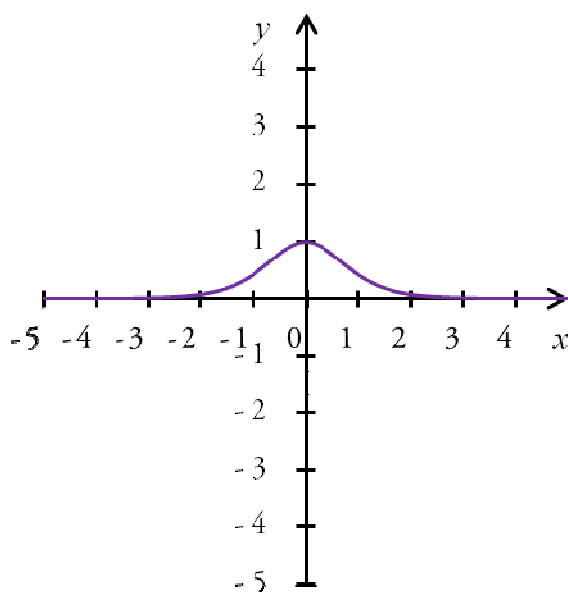
Obr. 3.9: Graf funkce kotangens hyperbolický  $y = \operatorname{cotgh} x$



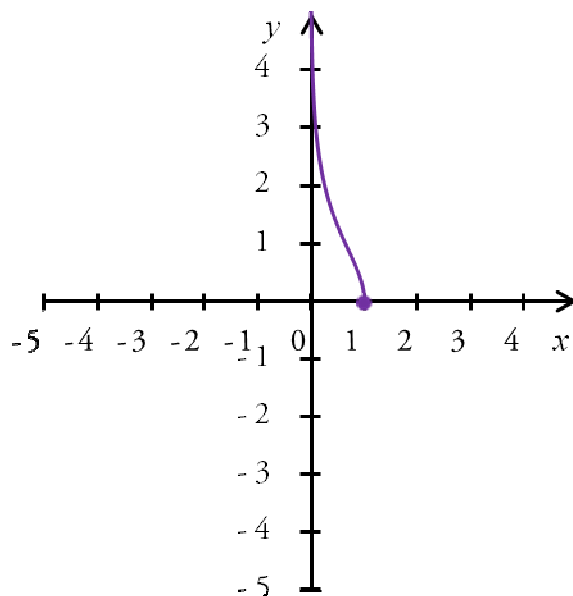


Obr. 3.10: Graf funkce argument kotangenty hyperbolické  $y = \operatorname{arccoth} x$

Funkci hyperbolický sekans budeme značit  $y = \operatorname{sech} x$  (Obr. 3.11). Relaci, která je k ní inverzní, nazýváme argument hyperbolické sekanty, a protože tato relace není funkcí, značíme ji  $y = \operatorname{Argsech} x$  s velkým písmenem na začátku. Její horní polovinu pak prohlásíme za inverzní funkci  $y = \operatorname{argsech} x$  (Obr. 3.12).

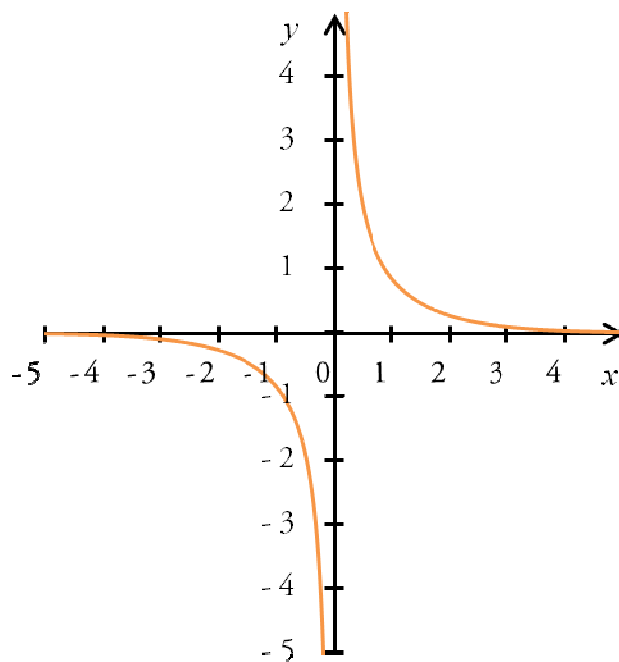


Obr. 3.11: Graf funkce sekans hyperbolický  $y = \operatorname{sech} x$

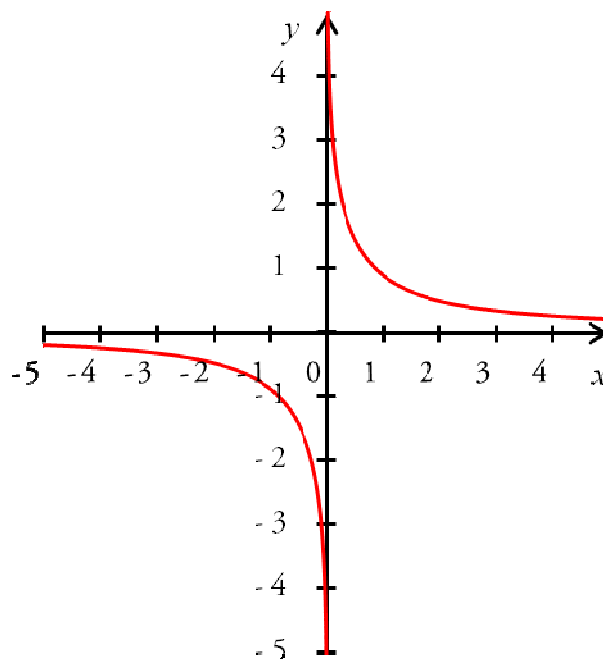


Obr. 3.12: Graf funkce argument sekanty hyperbolické  $y = \operatorname{argsech} x$

Funkci hyperbolický kosekans budeme značit  $y = \operatorname{cosech} x$  (Obr. 3.13). Osy souřadnic jsou asymptotami grafu. Relaci, která je k ní inverzní, nazýváme argument hyperbolické kosekanty, a protože je tato relace zároveň funkcí, značíme ji  $y = \operatorname{argcosech} x$  (Obr. 3.14). Osy souřadnic jsou také asymptotami grafu



Obr. 3.13: Graf funkce kosekans hyperbolický  $y = \operatorname{cosech} x$



Obr. 3.14: Graf funkce argument kosekanty hyperbolické  $y = \operatorname{argosech} x$

### 3.2 Odchyly a jiné verze symboliky

V historickém přehledu týkajícím se hyperbolických funkcí jsme hovořili o různých způsobech značení hyperbolických funkcí, ze kterých se postupně začalo používat značení Lambertovo, které je patrně nejrozšířenější, ale lze se setkat i s modifikovaným Riccatiho značením. Riccatiho modifikované značení se používá například v Rusku, Francii a lze se s ním setkat i v USA. V souvislosti s hyperbolickými funkcemi se lze tedy setkat se značením  $y = \operatorname{sh} x$  pro sinus hyperbolický,  $y = \operatorname{ch} x$  pro kosinus hyperbolický,  $y = \operatorname{th} x$  pro tangens hyperbolický,  $y = \operatorname{cth} x$  pro kotangens hyperbolický,  $y = \operatorname{sch} x$  pro sekans hyperbolický a  $y = \operatorname{csch} x$  pro kosekans hyperbolický.

U hyperbolometrických funkcí je situace se značením ještě méně ustálená než u hyperbolických funkcí. Příkladem budiž hyperbolometrická resp. inverzní funkce k funkci  $y = \sinh x$ , kterou značíme  $y = \operatorname{argsinh} x$ , argument sinu hyperbolického. Někteří autoři však preferují značení  $y = \operatorname{arsinh} x$  a lze se setkat i se značením analogickým jako u cyklometrických funkcí, např.  $y = \operatorname{arcsinh} x$ , tedy arkuskosinus

hyperbolický. Obdobné značení u hyperbolometrických funkcí považujeme za méně vhodné; protože u cyklometrických funkcí jde o zkrácení slova arcus, tedy oblouk kružnice. U hyperbolometrických funkcí se o délku oblouku kružnice nejedná, takže pojem je v souvislosti s hyperbolometrickými funkcemi irelevantní.

### 3.3 Značení a symbolika v programu Geogebra

Program Geogebra 5.0 má definován všech šest hyperbolických funkcí: hyperbolický sinus se v Geogebře značí  $\sinh$ , hyperbolický kosinus se značí  $\cosh$ , hyperbolický tangens respektive hyperbolický kotangens se značí bohužel ve většině lokalizací Geogebry  $\tanh$  respektive  $\coth$ . Je zajímavé, že u goniometrických funkcí na rozdíl od hyperbolických funkcí Geogebra reflektuje české názvosloví, ale ne zcela. Když chceme například zapsat tangens hyperbolický, identifikátoru funkce zapsaného ve tvaru  $\tan$  Geogebra rozumí stejně jako tvaru  $\operatorname{tg}$ . O to zajímavější je, že Geogebra nerozumí zápisu pro kotangens ve tvaru  $\operatorname{cotg}$ , ale rozumí zápisu anglické verze Geogebry  $\cot$  případně málo používané variantě  $\operatorname{ctg}$ . Sekans hyperbolický se značí  $\operatorname{sech}$ , kosekans hyperbolický jako  $\operatorname{csch} x$ .

Hyperbolometrické funkce jsou však zavedeny v Geogebře pouze tři: argument kosinu hyperbolického, argument sinu hyperbolického a argument tangenty hyperbolické. V nápovědě Geogebry se tyto funkce nazývají kosinus antihyperbolický, značí se  $\operatorname{acosh} x$ , sinus antihyperbolický, značí se  $\operatorname{asinh} x$ , a pro tangens antihyperbolický se používá značení  $\operatorname{atanh} x$ . Geogebra však dokáže rozpoznat například i značení  $\operatorname{arcsinh} x$ , nikoli však  $\operatorname{argsinh} x$  pro argument hyperbolického sinu.

### 3.4 Přehled současného používaného značení hyperbolických funkcí

V následující tabulce (Tabulka 3.1) uvádíme přehled českého názvosloví hyperbolických funkcí v porovnání se značením často používaným v zahraničí.

Název funkce	Česká republika	Svět
hyperbolický sinus	$\sinh$	$\sinh/sh$
hyperbolický kosinus	$\cosh$	$\cosh/ch$
hyperbolický tangens	$\tgh$	$\tanh/th$
hyperbolický kotangens	$\cotgh$	$\cotanh/coth$
hyperbolický sekans	$\sech$	$\sech$
hyperbolický kosekans	$\cosech$	$\csch$
argument hyperbolického sinu	$\operatorname{argsinh}$	$\operatorname{argsinh}/\operatorname{arcsinh}/\operatorname{arsinh}$
argument hyperbolického kosinu	$\operatorname{argcosh}$	$\operatorname{argcosh}/\operatorname{arccosh}/\operatorname{arcosh}$
argument hyperbolické tangenty	$\operatorname{argtgh}$	$\operatorname{argtanh}/\operatorname{arctanh}/\operatorname{artanh}$
argument hyperbolické kotangenty	$\operatorname{argcotgh}$	$\operatorname{argcoth}/\operatorname{arccoth}/\operatorname{arcoth}$
argument hyperbolické sekanty	$\operatorname{argsech}$	$\operatorname{argsech}/\operatorname{arcsech}/\operatorname{arsech}$
argument hyperbolické kosekanty	$\operatorname{argcosech}$	$\operatorname{argcsch}/\operatorname{arccsch}/\operatorname{arcsch}$

Tabulka 3.1 Přehled značení hyperbolických funkcí

Pro úplnost uvádíme ještě přehled značení hyperbolických funkcí, které je možné použít v Geogebře a MS Excel (Tabulka 3.2).<sup>9</sup> Hvězdička „\*“ označuje značení, které je definováno pouze v MS Excel 2013, nikoli ve starších verzích MS Excel. Nevyplněná políčka v tabulce znamenají, že funkci je nutné vyjádřit pomocí funkcí, kterým MS Excel rozumí.

Název funkce	Geogebra	MS Excel	
		český	anglický
hyperbolický sinus	$\sinh$	$\sinh$	$\sinh$
hyperbolický kosinus	$\cosh$	$\cosh$	$\cosh$
hyperbolický tangens	$\tanh$	$\tgh$	$\tanh$
hyperbolický kotangens	$\coth/\cotanh$	$\cotgh$	$\coth$
hyperbolický sekans	$\sech$	$\sech^*$	$\sech^*$
hyperbolický kosekans	$\csch/\cosech$	$\csch^*$	$\csch^*$
argument hyperbolického sinu	$\operatorname{asinh}/\operatorname{arcsinh}$	$\operatorname{arcsinh}$	$\operatorname{arcsinh}$
argument hyperbolického kosinu	$\operatorname{acosh}/\operatorname{arccosh}$	$\operatorname{arccosh}$	$\operatorname{arccosh}$
argument hyperbolické tangenty	$\operatorname{atanh}/\operatorname{arctanh}$	$\operatorname{arctgh}$	$\operatorname{arctanh}$
argument hyperbolické kotangenty		$\operatorname{arccoth}^*$	$\operatorname{arccoth}^*$

<sup>9</sup> Platí pro MS Office pro operační systém Windows, a to ve verzi 2007 a vyšších verzích.

---

argument hyperbolické sekanty			
argument hyperbolické kosekanty			

Tabulka 3.2 Přehled značení hyperbolických funkcí

## 4 Prostředky výukového kurzu

### 4.1 Organizace výuky

Ve škole Gymnázium Rumburk, kde náš kurz byl pokusně realizován, byla tato výuka učiněna součástí předmětu Cvičení z matematiky v matematicko-technickém bloku sedmého ročníku osmiletého studia a třetího ročníku čtyřletého studia v rozsahu dvou hodin týdně. Během pokusu došlo také k několika přesunům výuky do jiných hodin i učeben, takže výuka nakonec proběhla ve čtyřech různých učebnách: v klasické učebně 3. A, ve speciálních učebnách Posluchárna fyziky, Fyzikální laboratoř a audiovizuální učebně 3. D. Všechny učebny však měly v zásadě stejné vybavení. K dispozici byla klasická černá nebo zelená tabule popisovaná klasickými křídami bílými i barevnými. Učebny byly vybaveny počítačem spojeným s pevně nainstalovaným dataprojektorem.

Žáci jsou zvyklí pracovat s běžným rýsovacím náčiním, jako s trojúhelníkem s ryskou, kružítkem a také se šablonami funkcí Logarex 25516-S. Tyto šablony ovšem neobsahují hyperbolické ani hyperbolometrické funkce. Proto si žáci vyrobili papírové šablony pro funkce sinus hyperbolický, kosinus hyperbolický a tedy i jejich inverze.

#### 4.1.1 Softwarové prostředky

Hlavní výukový program, který byl zvolen pro náš kurz, byla Geogebra a MS Excel. Jeho využití bylo omezeno proto, aby žáci, kteří tento placený software nemají doma nainstalovaný, nebyli znevýhodněni. Myslíme si však, že je žádoucí, aby se žáci také zdokonalovali v práci se softwarem, u kterého je velká šance, že ho budou v běžném životě používat. Přestože se domníváme, že na některé aktivity v průběhu kurzu by bylo vhodnější využití MS Excel především v rámci vyučovací hodiny, také z licenčních důvodů na straně školy, kde byl náš kurz realizován, jsme tak neučinili.

Považujeme však za velmi přínosné, že se všichni žáci z našeho kurzu seznámili a pracovali alespoň s výukovým programem Geogebra.

#### 4.1.2 Výroba šablon hyperbolických funkcí

Před vytvářením šablon bylo zvažováno použití programu Geogebra nebo programu MS Excel pro vykreslení grafu požadovaných funkcí. Nakonec byl zvolen program MS Excel ve verzi 2007 především z důvodu snadnějšího nastavení a upravení grafu funkce tak, aby výsledný graf respektive budoucí šablona odpovídala skutečnému měřítku. U novějších verzí Microsoft Office včetně Microsoft Office 2013 je však postup vytváření grafů funkcí obdobný. Druhým významným důvodem pro použití MS Excel byl fakt, že oproti Geogebře je v programu MS Excel na výběr větší množství nastavení (například zakončení os), která významně ovlivňují grafickou podobu výsledného grafu.<sup>10</sup> Postup vytváření grafu v MS Excel popíšeme podrobněji ve snaze ukázat, že pokud chceme v tomto programu vykreslit graf funkce, nemůžeme využít tabulku jako výpis z funkce, jak je občas nepřesně uváděno například v (Hanzalová 2013, s. 48).

Naším cílem je tedy ukázat, jak lze během krátké chvíle vytvořit v MS Excelu soubor, který bude umožňovat zadávat do připravené buňky skoro libovolný předpis funkce a zadaná funkce se ihned vykreslí do grafu obdobně jako na Obr. 4.1. Vytvořený soubor bude mít problémy se zobrazením složitějších funkcí, které mají například svislé asymptoty.

Tyto problémy je možné ošetřit například pomocí VBA<sup>11</sup>. Pro naše potřeby však postačí, že program dokáže vykreslit většinu základních i složitějších funkcí obdobně jako na Obr. 4.1, kde je vidět, že lze připravit dokonce více buněk k tomu, aby fungovaly jako vstupní pole pro zadávání předpisu funkcí a díky tomu lze zobrazovat více než jednu funkci do jednoho grafu.

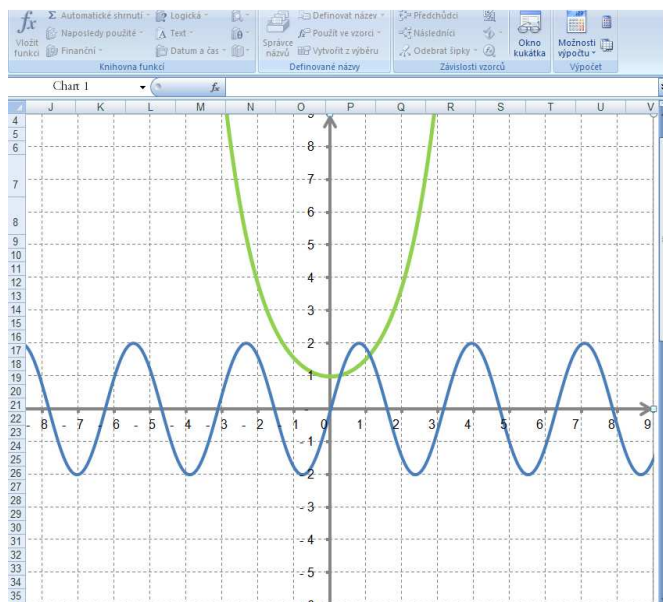
---

<sup>10</sup> Subjektivní názor autora práce, který považuje za důležitý.

<sup>11</sup> Visual Basic for Applications je název objektového programovacího jazyka umožňující v programu MS Excel programovat a využívat makra.

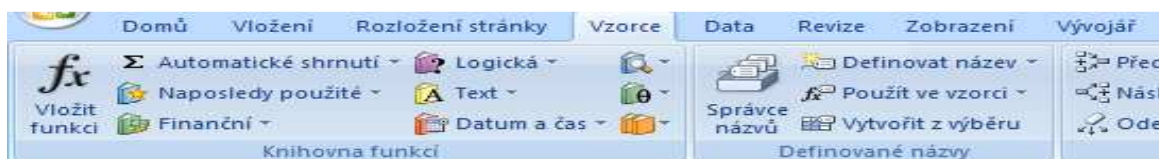


Dovolujeme si upozornit s ohledem na to, že popisovaný způsob nepovažujeme za příliš známý, že tento způsob vytvoření grafu v MS Excel vychází od Stephena Bullena, který vytvořil program pojmenovaný CHTFRMLA.xls a publikoval ho v roce 1999. Dostupný je z <http://www.oaltd.co.uk/Excel/Default.htm>.



Obr. 4.1: Ukázka tvorby grafů funkcí v MS Excel

Pro vytváření grafu funkce je třeba znát, jakým způsobem lze v MS Excel deklarovat proměnnou. Deklarovat proměnnou lze pomocí karty Vzorce, skupiny Definované názvy a položky Správce názvů (viz Obr. 4.2).



Obr. 4.2: Správce názvů

Další důležitou součástí MS Excel je funkce<sup>12</sup> Evaluate v české jazykové lokalizaci pojmenovaná Vyhodnotit. Jedná se o funkci, která vyžaduje mít dokument v Excelu spuštěn s podporou maker. Díky funkci Vyhodnotit dokáže Excel postupně vyhodnocovat rovnici, která je zadána uživatelem do pro náš účel vytvořeného vstupního

<sup>12</sup> Není myšleno z matematického hlediska.

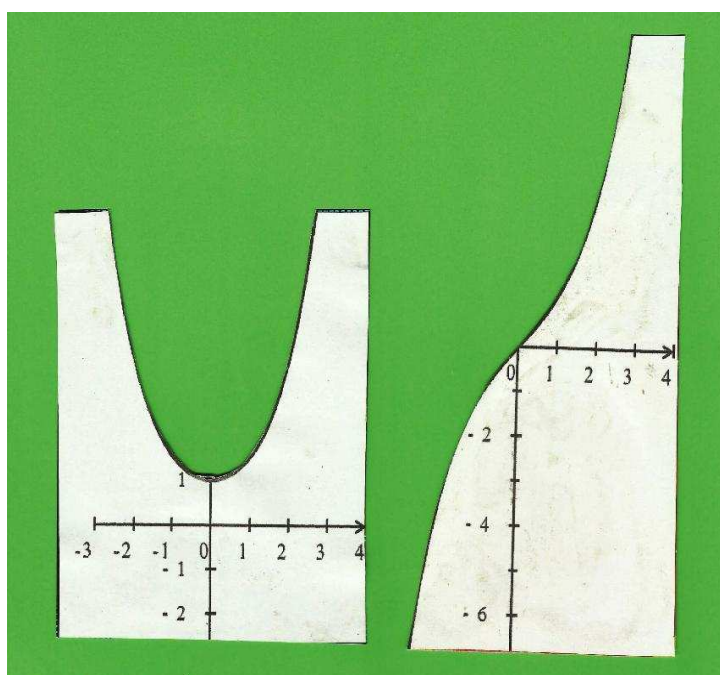
pole. Samotný princip vykreslení grafu spočívá v tom, že si osu  $x$ , která je součástí grafu, rozdělíme na určitý počet dílků. Pro náš účel bude stačit rozdělit si ji na 10000 dílků, je však možné ji rozdělit až na 32000 dílků. Tímto postupem získáváme  $x$ -ové souřadnice bodů, které budou tvořit výsledný graf zobrazované funkce. Tyto souřadnice budou uloženy v proměnné  $x$ , která bude z programátorského hlediska definovat pole. Pomocí funkce Vyhodnotit se do jiné proměnné, v našem případě nejlépe  $y$ , bude vyhodnocovat rovnice, která byla uživatelem zadána do vstupního pole tak, že program bude postupně brát hodnoty z pole definovaného jako  $x$  a bude pro každé  $x$  získávat hodnotu  $y$ -ové souřadnice. Hodnoty  $y$ -ových souřadnic pak budou uloženy v proměnné  $y$ , která bude tvořit opět pole. Takto dokážeme vytvořit výpis ze zadané funkce, respektive získáme datové řady  $x$ -ových a  $y$ -ových souřadnic bodů, které budou tvořit graf matematické funkce. Vzniklé datové řady jsme díky tomu schopni nechat zobrazit do grafu.

Zásadní rozdíl této metody tvorby grafů v MS Excelu od běžně používaných je ten, že v případě, že máme takový soubor v MS Excelu již vytvořen, lze zobrazit skoro libovolnou funkcí vhodným přepsáním předpisu funkce ve vstupním poli obdobně, jak je tomu u Geogebra. Vzhledem k množství zobrazovaných bodů v grafu, které tvoří funkci, nedochází k deformaci a k nepřesnostem ve výsledném grafu. Při propojení jednotlivých bodů spojnicí graf funkce odpovídá skutečnému tvaru námi zadané funkce. Chceme-li tedy v MS Excelu zobrazovat graf funkce například pro tvorbu didaktických materiálů pro žáky, je využití tabulky nevhodné a časově nevhodné.

V okamžiku, kdy jsme vytvořili funkční program v MS Excel pro zobrazování funkcí, bylo následně nejefektivnější metodou shledáno použití programu Pravítko 2.0, pomocí kterého byla velikost grafu nastavena tak, aby jeden centimetr na grafu v MS Excel odpovídal centimetru ve skutečnosti. Pomocí nástroje Výstřižek obsaženého v operačním systému Windows Vista a vyšším, byl pak graf vložen do programu Microsoft Word, takže se na stránku formátu A4 vešly právě 4 grafy. Následně

byl dokument z Wordu vytisknut a nakopírován tak, aby každý žák dostal jeden graf s funkcí  $y = \sinh x$  a jeden graf s funkcí  $y = \cosh x$ . Je třeba zdůraznit, že není možné převádět dokument z Microsoft Word do formátu pdf, protože vlivem převodu do otevřeného formátu dochází k mírné deformaci obrázků, která je v našem případě naprosto zásadním problémem.

Žáci si z grafů, které dostali, vytvořili šablony podle předlohy. Podlepi si grafy funkcí pevnou papírovou podložkou a vystříhli si šablony funkcí  $y = \sinh x$  a  $y = \cosh x$  podle vzoru znázorněném na Obr. 4.3.

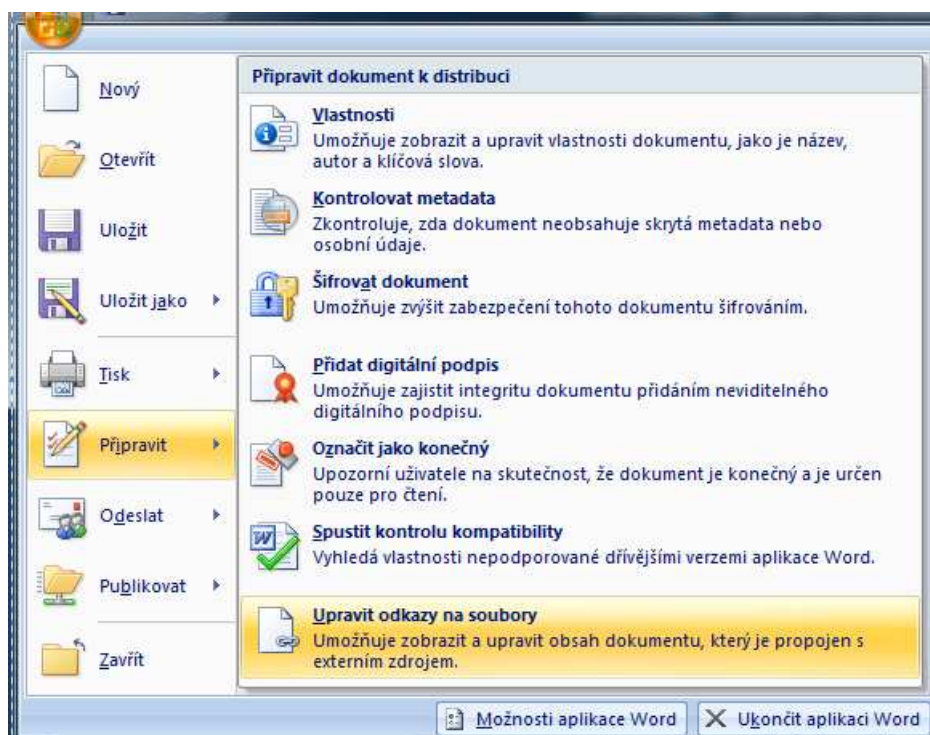


Obr. 4.3: Šablony funkcí  $y = \sinh x$  a  $y = \cosh x$

Funkční program, jehož vytvoření bylo popsáno výše, je součástí přílohy č. 8. Autor této práce se domnívá, že by mohl posloužit nejen k vytváření materiálů do výuky matematiky, ale například i pro tvorbu obrázků do diplomových, bakalářských či jiných prací obdobně, jak je tomu u této práce. Je však třeba upozornit, že daný program nefunguje v kancelářských softwarech jako například LibreOffice, protože ten a jemu obdobné open-source programy nemají kompatibilní makra s MS Office a to vadí především u funkce Evaluate. Stejně tak není možné používat daný pro-

gram ve službě Office Online, která je dostupná uživatelům zdarma, ale s množstvím omezení.

Za jednu z výhod takového programu lze považovat možnost snadné následné editace grafu, pokud graf vložíme přímo do programu MS Word z MS Excel. Geogebra sice umožňuje vytvářet také grafy a především si dobře poradí s funkcemi se svislými asymptotami, ale i s dalšími křivkami, které nejsou grafy funkcí, ale import obrázků do Microsoft Word není příliš komfortní a takto vložené grafy je velmi složité případně dodatečně editovat. Na závěr si dovoluujeme upozornit, že vložíme-li graf z MS Excel do MS Word, tak je tento graf většinou stále propojen se zdrojovým souborem v MS Excel. Aby se nám příslušný graf neměnil v závislosti na zdrojovém souboru v námi používaném MS Excel, je třeba zrušit propojení grafu se zdrojovým souborem přímo v MS Word pomocí volby *Upravit odkazy na soubor*, viz Obr. 4.4. Pracujeme-li ve formátu docx, budeme moci i poté upravovat graf z hlediska barvy křivky, upravovat osy, nikoli však měnit předpis vykreslované funkce.



Obr. 4.4: Zrušení propojení na soubor v MS Word 2007

#### 4.1.3 Žákovské prezentace a referáty jako forma výuky

Výuková skupina měla 19 žáků, víceméně zaměřených na matematické a technické předměty. Každému ze žáků byla přidělena jedna matematická úloha, kterou pak formou referátu učil své kolegy.

Tři referáty byly věnovány zobrazení grafu funkcí tangenty hyperbolické, kotangenty hyperbolické a sekanty hyperbolické, a to užitím exponenciálního předpisu hyperbolické funkce postupným vyčíslením funkčních hodnot pro zvolené  $x$ -ové souřadnice užitím tabulky v softwaru Geogebra.

Jedenáct úloh bylo věnováno zobrazení 3 až 4 souvisejících grafů hyperbolických či hyperbolometrických funkcí. Žák si zobrazování grafů připravil v programu Geogebra, při hodině grafy postupně promítal a žáci v lavicích je sestrojovali užitím vlastnoručně vyrobených šablon.

Pět úloh se vztahovalo ke grafickému řešení rovnic a nerovnic, přičemž jedna z funkcí obsažených ve výrokové formě byla probrána v základním středoškolském kurzu funkcí, druhá byla hyperbolická nebo hyperbolometrická. Žák vedoucí zaměstnání měl připraveny tři soubory Geogebry: Základní obrázek a z něj vytvořené další dva soubory – pro rovnici a pro nerovnici.

Poznamenejme, že všichni žáci této skupiny měli doma počítač, byli schopni si nainstalovat Geogebrou, pokud ji už nepoužívali dříve, a byli schopni v jednoduchých příkladech s Geogebrou pracovat. Jedním z cílů výuky ostatně bylo, aby se žáci pocvičili v užití dynamické geometrie na počítači.

#### 4.2 Návrh učebního textu

Tento oddíl je učebním textem pro podporu výuky hyperbolických funkcí na středních školách. Představa autora této práce spočívá v tom, že v nějakém vhodném volitelném předmětu bude podle tohoto učebního textu odučeno zhruba 14 hodin tématu Hyperbolické a hyperbolometrické funkce. Předpokládá, že bezprostředně

předcházet tomuto tématu bude opakování a shrnutí základního kurzu funkcí včetně relací a funkcí inverzních a jejich grafů.

#### 4.2.1 Opakování: Definice goniometrických funkcí

##### a) Klasická definice užitím délky oblouku jednotkové kružnice

Připomeňme si definici obvyklou při zavedení sinu a kosinu orientovaného úhlu  $\alpha$ : Sestrojíme ortonormální souřadnicový systém, měřítka obou os jsou stejná. V počátku opíšeme kružnici o poloměru 1 (j).

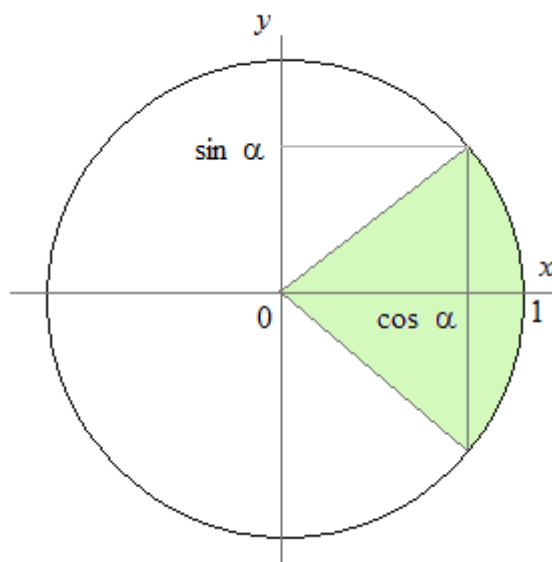
**Definice:** Za sinus orientovaného úhlu  $\alpha$ , jehož počáteční rameno je kladná polopřímka osy  $x$  a koncové rameno je libovolná polopřímka začínající v počátku, budeme považovat  $y$ -ovou souřadnici bodu, v němž koncové rameno orientovaného úhlu  $\alpha$  protíná jednotkovou kružnici. Za kosinus orientovaného úhlu  $\alpha$ , jehož počáteční rameno je kladná polopřímka osy  $x$  a koncové rameno je libovolná polopřímka začínající v počátku, budeme považovat  $x$ -ovou souřadnici bodu, v němž koncové rameno orientovaného úhlu  $\alpha$  protíná jednotkovou kružnici. Přitom (základní) velikost orientovaného úhlu je dána délkou oblouku, který počáteční a koncové rameno vytínají na jednotkové kružnici. Další goniometrické funkce pak definujeme známým způsobem jako podíly nebo reciproké hodnoty funkcí sinus a kosinus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

##### b) Obsah kruhové výseče kruhu v jednotkové kružnici

Délka kružnice o poloměru  $r$  je  $l = 2\pi r$ . Číselná velikost délky jednotkové kružnice je tedy  $2\pi$ . To je zároveň velikost plného úhlu, který tomu odpovídá. Orientovanému úhlu o velikosti  $\alpha$  tedy odpovídá délka oblouku na jednotkové kružnici o číselné velikosti  $\alpha$ . Obsah kruhu je  $S = \pi r^2$ . Číselná velikost obsahu jednotkového kruhu o poloměru  $r$  je tedy  $\pi$ . Je tedy poloviční než velikost plného úhlu, který

tomu odpovídá. Orientovanému úhlu o velikosti  $\alpha$  tedy odpovídá obsah kruhové výseče jednotkového kruhu o číselné velikosti  $\frac{\alpha}{2}$ . Nebo jinak, avšak rovnocenně: máme-li dostat v jednotkovém kruhu výseč o velikosti obsahu  $\alpha$ , potřebujeme k tomu orientovaný úhel velikosti  $2\alpha$  (Obr. 4.5).



Obr. 4.5: Orientovaný úhel vyjádřený obsahem výseče

#### 4.2.2 Definice základních hyperbolických funkcí

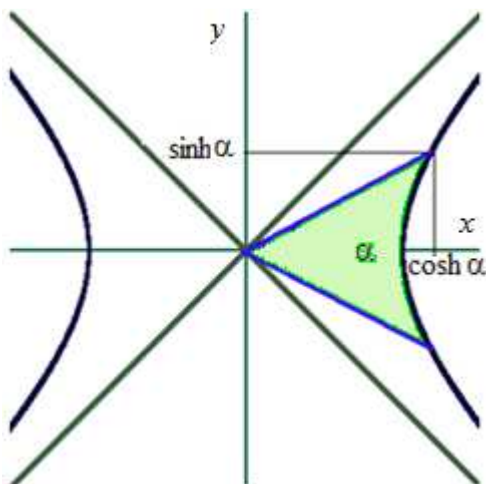
##### a) Definice užitím obsahu výseče rovnoosé hyperboly

V poslední definici nahradíme jednotkovou kružnici jednotkovou rovnoosou hyperbolou, jejíž hlavní osa je osou  $x$  a obě poloosy mají délku 1.

**Definice:** Nechť obsah obrazce, ohraničeného obloukem jednotkové rovnoosé hyperboly a dvěma rameny orientovaného úhlu, jehož počáteční rameno je kladnou polopřímkou na ose  $x$ , je  $\frac{\alpha}{2}$ . Pak hyperbolickým sinem orientovaného úhlu je  $y$ -ová souřadnice bodu, v němž koncové rameno tohoto orientovaného úhlu protíná rovnoosou hyperbolu.

**Definice:** Nechť obsah obrazce, ohraničeného obloukem jednotkové rovnoosé hyperboly a dvěma rameny orientovaného úhlu, jehož počáteční rameno je kladnou

polopřímku na ose  $x$ , je  $\frac{\alpha}{2}$ . Pak hyperbolickým kosinem orientovaného úhlu je  $x$ -ová souřadnice bodu, v němž koncové rameno tohoto orientovaného úhlu protíná rovnosou hyperbolu (viz Obr. 4.6).



Obr. 4.6 Obsah hyperbolické výseče

**Definice:** Jako u funkcí goniometrických zavádíme další hyperbolické funkce,

hyperbolickou tangentu  $\operatorname{tgh} = \frac{\sinh}{\cosh}$

hyperbolickou kotangentu  $\operatorname{cotgh} = \frac{\cosh}{\sinh}$

hyperbolický sekans  $\operatorname{sech} = \frac{1}{\cosh}$

hyperbolický kosekans  $\operatorname{cosech} = \frac{1}{\sinh}$

### b) Definice užitím exponenciálních funkcí

Ze základního kurzu funkcí máme patrně představu, že typy funkcí jsou roztrženy do disjunktních skupin, jakými jsou např. polynomy, goniometrické funkce, mocninné funkce atd. Tato představa nepochybně záhy pomine.

Hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus se totiž dají zavést prostřednictvím exponenciálních funkcí.

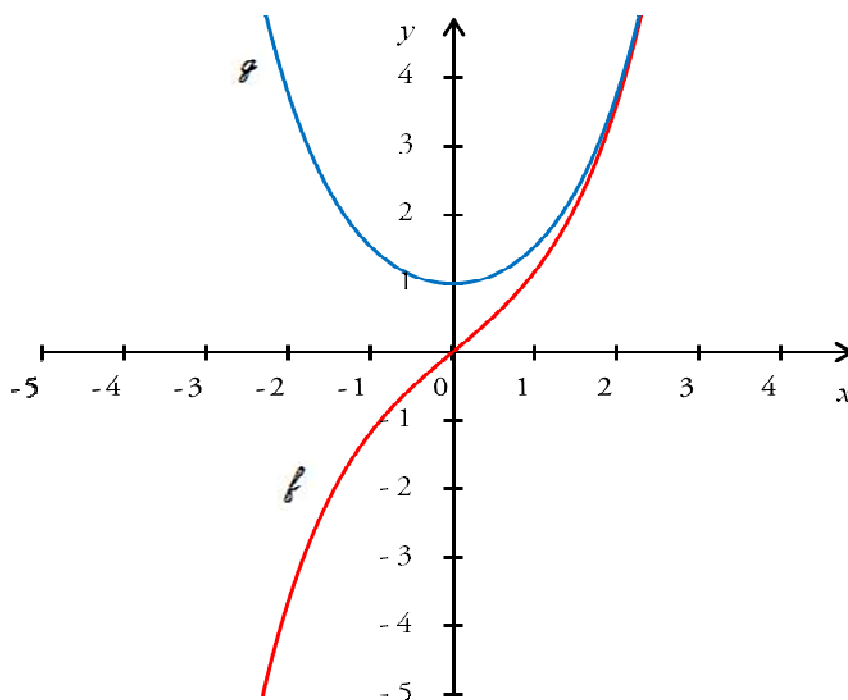


$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Hyperbolické funkce tedy vlastně patří mezi funkce exponenciální.

### c) Grafy hyperbolických funkcí

Cvičení: Užitím kapesního kalkulátoru vytvořte výpis z funkcí  $\sinh$  a  $\cosh$ . Načrtněte grafy obou funkcí. Zkontrolujte tabulkovým kalkulátorem, viz Obr. 4.7.



Obr. 4.7: Graf funkcí  $f : y = \sinh x$  a  $g : y = \cosh x$

Cvičení: Užitím kapesního kalkulátoru vytvořte výpis z funkcí  $\tanh$  a  $\coth$ . Načrtněte grafy obou funkcí. Zkontrolujte tabulkovým kalkulátorem (MS Excel nebo Geogebra).

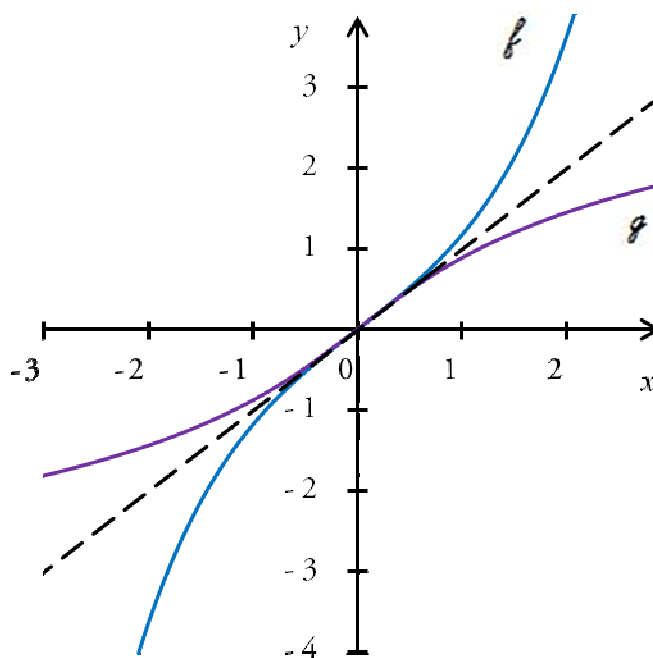
Cvičení: Užitím kapesního kalkulátoru vytvořte výpis z funkcí  $\operatorname{sech}$  a  $\operatorname{cosech}$ . Načrtněte grafy obou funkcí. Zkontrolujte tabulkovým kalkulátorem (MS Excel nebo Geogebra).

### 4.2.3 Inverzní relace a funkce k funkcím hyperbolickým

Inverzní relací k dané relaci  $\rho$  je množina  $\sigma = \text{inv}(\rho)$  všech uspořádaných dvojic tvaru  $[y; x]$ , kde  $[x; y]$  je prvkem původní relace.

Symbolicky zapíšeme  $\sigma = \text{inv}(\rho) = \{[y; x]; [x; y] \in \rho\}$ .

Graf inverzní relace získáme z ortonormálního grafu původní relace zobrazením v osové souměrnosti podle osy 1. a 3. kvadrantu (ukázka je na Obr. 4.8).



Obr. 4.8: Graf funkce  $f : y = \sinh x$  a k ní inverzní funkce  $g : y = \operatorname{arsinh} x$

Pokud všechny vzory inverzní relace mají nejvýše jeden obraz, je inverzní relace dokonce funkcí. Pokud aspoň jeden vzor inverzní relace má alespoň dva obrazy, inverzní relace není funkcí; obvykle pak hledáme takovou část původní funkce, která je prostá a její inverze pak je funkcí.

#### a) Argument hyperbolického sinu

Značíme  $y = \operatorname{arsinh} x$ .

Je to inverzní relace k hyperbolické funkci  $y = \sinh x$ . Ta je prostá v  $\mathbb{R}$ , proto také  $y = \operatorname{arsinh} x$  je nejen relací, ale i funkcí.

Cvičení: Sestrojte graf  $y = \operatorname{argsinh} x$ .

Řešení – 1. možnost: Ve výpisu funkce  $y = \sinh x$  zaměníme řádky  $x$  a  $y$  a obvyklým postupem vyneseme body a proložíme graf.

Řešení – 2. možnost: Graf  $y = \sinh x$  zobrazíme v osově souměrnosti podle osy 1. a 3. kvadrantu.

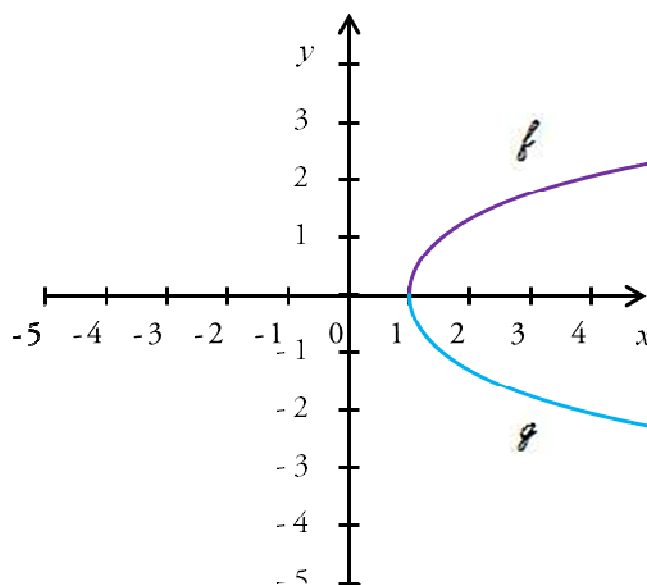
Poznámka: K tomu je nutno pracovat s ortonormálním systémem souřadnic – obě měřítka os jsou stejná. V obecnějším případě ortogonálního grafu (s různými měřítka os) jsou grafy původní relace a její inverze ve vztahu osově afinity, jejíž osou je přímka určená počátkem a bodem  $[1;1]$ ; tato osová afinita není kolmá.

## b) Argument hyperbolického kosinu

Cvičení: Sestrojte graf  $y = \operatorname{argcosh} x$ .

Řešení – 1. možnost: Ve výpisu funkce  $y = \cosh x$  zaměníme řádky  $x$  a  $y$  a obvyklým postupem vyneseme body a proložíme graf.

Řešení – 2. možnost: Graf  $y = \cosh x$  zobrazíme v osově souměrnosti podle osy 1. a 3. kvadrantu.



Obr. 4.9: Graf funkcí  $f : y = \operatorname{argcosh} x$  a  $g : y = -\operatorname{argcosh} x$

Vznikne graf inverzní relace  $y = \operatorname{Argcosh} x$ , která však není funkcí. K získání grafu inverzní funkce  $y = \operatorname{argcosh} x$  musíme vzít jen část, viz Obr. 4.9.

Poznámka: K tomu je nutno pracovat s ortonormálním systémem souřadnic – obě měřítka os jsou stejná. V obecnějším případě ortogonálního grafu (s různými měřítka os) jsou grafy původní relace a její inverze ve vztahu osově afinity, jejíž osou je přímka určená počátkem a bodem  $[1;1]$ ; tato osová afinita není kolmá.

### c) Další hyperbolometrické funkce

Cvičení: Sestrojte graf relace  $y = \operatorname{argtgh} x$ , určete obory. Je to funkce? Pokud ne, vyberte takovou její část, která je funkcí.

Cvičení: Sestrojte graf relace  $y = \operatorname{argcotgh} x$ , určete obory. Je to funkce? Pokud ne, vyberte takovou její část, která je funkcí.

Cvičení: Sestrojte graf relace  $y = \operatorname{argsech} x$ , určete obory. Je to funkce? Pokud ne, vyberte takovou její část, která je funkcí.

Cvičení: Sestrojte graf relace  $y = \operatorname{argcosech} x$ , určete obory. Je to funkce? Pokud ne, vyberte takovou její část, která je funkcí.

## 4.2.4 Odvozené hyperbolické a hyperbolometrické funkce

### a) Obory funkcí

Množiny značíme velkým psacím písmenem.<sup>13</sup>

**Definice:** Obor je objekt tvořený množinou prvků (nosičem), nad nímž jsou zavedeny vztahy (relace, třeba „větší než“, „menší nebo rovno než“ atd.) a operace (sčítání, násobení atd.).

Oborem proměnné je množina všech  $x$ , která chceme dosazovat do rovnice funkce (relace). Značíme jej  $\mathcal{O}$ . To platí pro relaci, funkci, rovnici i nerovnici.

<sup>13</sup> Množiny se občas z důvodu možností sazby (fontu) označují také velkým tiskacím písmenem. Takové značení se nám nejeví vhodným a nebudeme takové značení používat.

Úmluva: Není-li obor proměnné v zadání úlohy explicitně uveden, je  $\mathcal{O} = \mathcal{R}$ , tedy obor proměnné je obor reálných čísel.

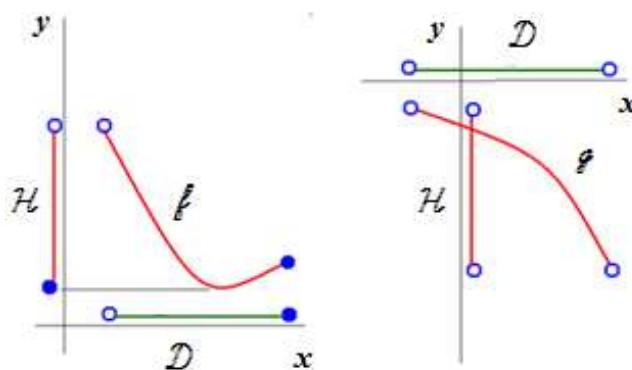
Definičním oborem funkce je množina všech prvků oboru proměnné  $x$ , pro která existuje hodnota funkce. Definiční obor značíme velkým psacím písmenem  $\mathcal{D}$ . Definičním oborem rovnice nebo nerovnice je průnik definičních oborů funkcí zapsaných jako levá a pravá strana.

Oborem hodnot funkce je množina všech reálných čísel, která jsou hodnotou  $y$  vypočítanou z rovnice funkce pro všechna  $x$  definičního oboru. Obor hodnot budeme značit velkým psacím písmenem  $\mathcal{H}$ . Rovnice a nerovnice obor hodnot nemají. Rovnice a nerovnice mají obor kořenů  $\mathcal{K}$ . Je to množina všech čísel z definičního oboru, pro které se rovnice či nerovnice stane pravdivým výrokem.

Pokud studujeme funkci na omezeném oboru proměnné, často se stává, že grafem funkce či relace je jen část křivky. Je třeba vyznačit, zda krajní body oblouku křivky:

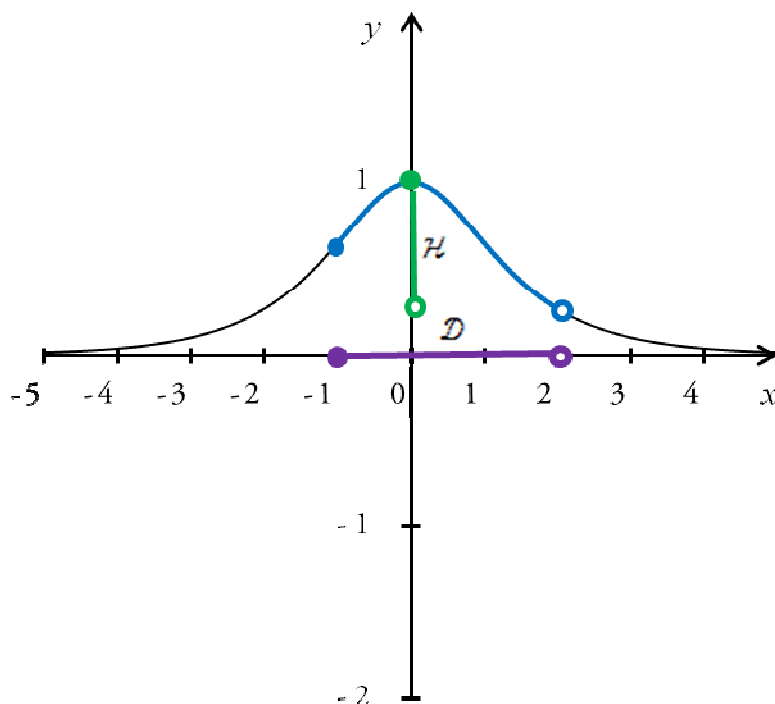
- a) patří ke grafu – značíme plným kolečkem
- b) nepatří ke grafu – značíme prázdným kolečkem

Stejnou úmluvu použijeme i při vyznačování oborů na ose  $x$  respektive  $y$ , viz Obr. 4.10.



Obr. 4.10: Značení krajních bodů intervalů a křivek

Ukázka 1: Funkce je dána rovnicí  $y = \operatorname{sech} x$  a oborem proměnné  $\langle -1; 2 \rangle$ ; sestrojte její graf a určete definiční obor a obor hodnot.



Obr. 4.11: Funkce dána rovnicí  $y = \operatorname{sech} x$  a oborem proměnné  $\mathcal{O} = \langle -1; 2 \rangle$

$\mathcal{D} = \langle -1; 2 \rangle$  a  $\mathcal{H} = (0, 3; 1, 0)$ .

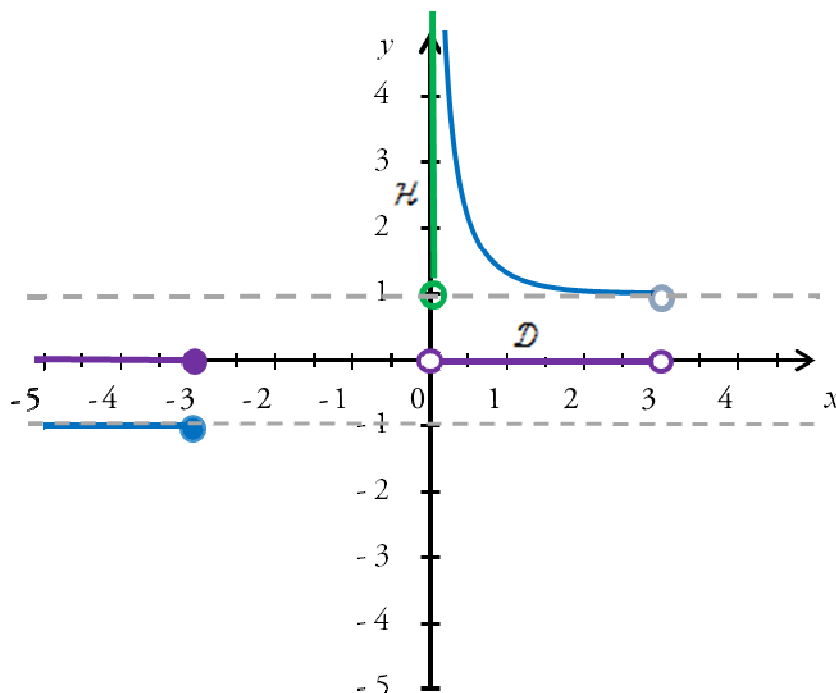
Řešení je zobrazeno na Obr. 4.11. Černá část křivky jen ilustruje, jak by graf vypadal, kdyby obor proměnné nebyl omezen.

Ukázka 2: Funkce je dána rovnicí  $y = \operatorname{cotgh} x$  a oborem proměnné  $(-\infty; -3) \cup (0; 3)$ . Sestrojte její graf a určete definiční obor a obor hodnot. Funkční hodnoty zaokrouhlete na 8 desetinných míst.

Řešení: Uvědomíme si, jakým vztahem je definován tangens hyperbolický. Kotangens hyperbolický lze vyjádřit jako  $\frac{\cosh x}{\sinh x}$ . Uvědomíme si, že kotangens hyperbolický je tedy nedefinovaný pro  $x = 0$  z důvodu sinu hyperbolického ve jmenovateli. Ze znalosti průběhu křivky sinu a kosinu hyperbolického lze odvodit, že kotangens hyperbolický má asymptoty  $y = -1$  a  $y = 1$ . Je důležité vědět, že vzhledem

k zadanému oboru proměnné ovšem přímka  $y = 1$  asymptotou není (přestože jsme ji pro názornost do grafu v Obr. 4.12 zanesli). Vytvoříme si výpis z funkce s přesností funkčních hodnot na osm desetinných míst, abychom ukázali, že funkční hodnota není nikde přesně rovna  $\pm 1$ . Grafické řešení je na Obr. 4.12.

$x$	-5	-3	0	1	2	3
$y$	-1,00009080	-1,00496982	N	1,31303529	1,03731472	1,00496982



Obr. 4.12: Funkce  $y = \coth x$  a oborem proměnné  $\mathcal{O} = (-\infty; -3) \cup (0; 3)$

$$\mathcal{D} = (-\infty; -3) \cup (0; 3) \text{ a } \mathcal{H} = (1; +\infty).$$

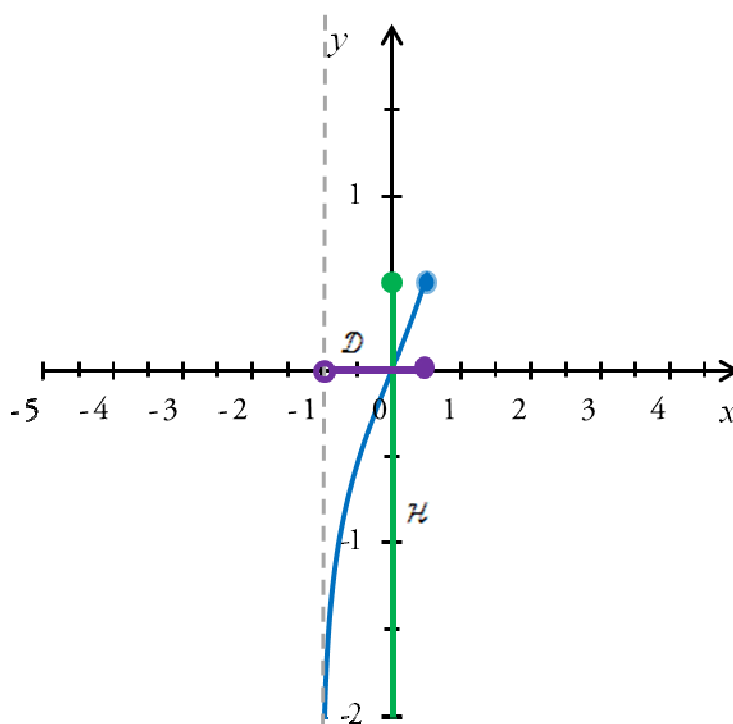
Ukázka 3: Funkce je dána rovnicí  $y = \operatorname{argth} x$  a oborem proměnné  $\mathcal{O} = (-\infty; 0,5)$ ; sestrojte její graf a určete definiční obor a obor hodnot.

Řešení: Uvědomíme si, jakým vztahem je definován tangens hyperbolický. Tangens hyperbolický lze vyjádřit jako  $\frac{\sinh x}{\cosh x}$ . Ze znalosti průběhu křivky sinu a kosinu

hyperbolického snadno odvodíme, že tangens hyperbolický bude mít asymptoty  $y = -1$  a  $y = 1$ . Vzhledem k tomu, že funkce argument tangenty hyperbolické je obrazem v osové souměrnosti podle osy 1. a 3. kvadrantu funkce hyperbolický

tangens, bude mít funkce  $y = \operatorname{argtgh} x$  asymptoty  $x = -1$  a  $x = 1$ . Vytvoříme si výpis z funkce a to tak, aby zvolené hodnoty  $x$  byly voleny z intervalu  $(-1; 0,5)$ , protože funkce na intervalu  $(-\infty; -1)$  není definovaná. Sestrojíme výsledný graf, viz Obr. 4.13.

$x$	-0,5	-0,3	-0,1	0	0,5
$y$	-0,55	0,31	-0,01	0,00	0,46



Obr. 4.13: Funkce dána rovnicí  $y = \operatorname{argtgh} x$  a oborem proměnné  $(-\infty; 0,5)$

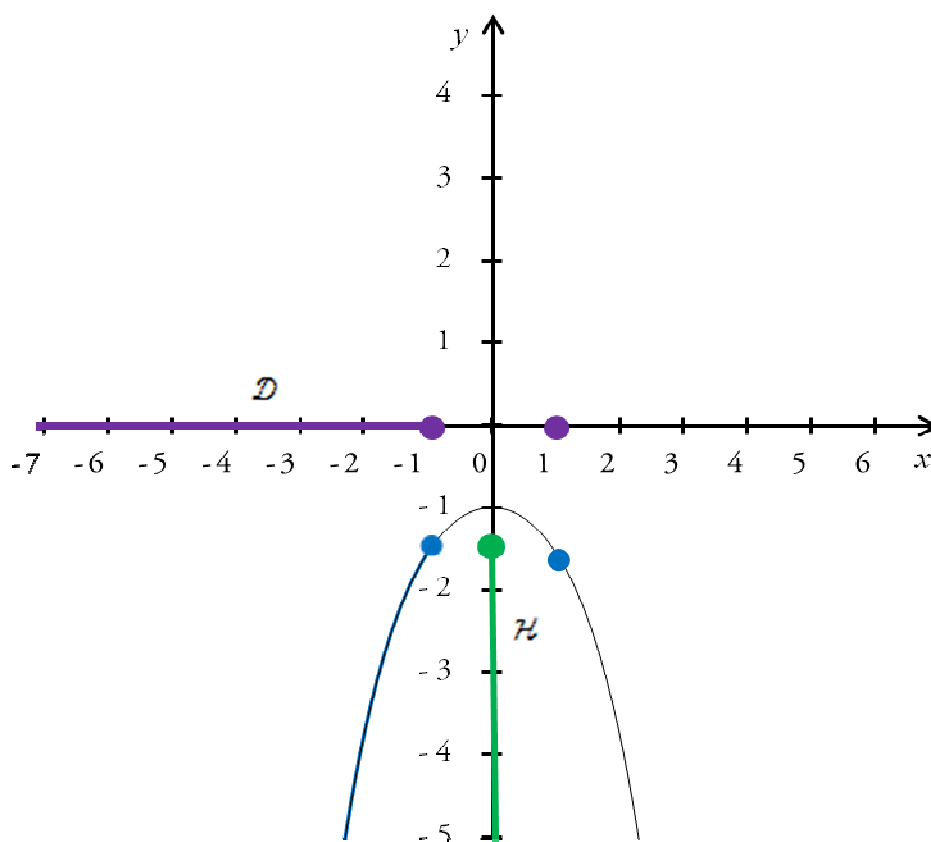
$\mathcal{D} = (-1; 0,5)$  a  $\mathcal{H} = (-\infty; 0,6)$ .

Ukázka 4.: Funkce je dána rovnicí  $y = -e^{-x} - e^x$  a oborem proměnné pro  $(-\infty; -1) \cup \{1\}$ ; sestrojte její graf pomocí šablony hyperbolických funkcí do ortonormálního grafu a určete definiční obor a obor hodnot. Zdůvodněte, proč je funkce daná předpisem  $y = -e^{-x} - e^x$  funkcí hyperbolickou.

Řešení: Funkce  $f : y = -e^{-x}$  je souměrná podle osy  $x$  s funkcí  $y = e^{-x}$ . Funkce  $g : y = -e^x$  je osově souměrná podle osy  $x$  s funkcí  $y = e^x$ . Součtem funkce



$f : y = -e^{-x}$  s  $g : y = -e^x$  vznikne obrácená řetězovka, tedy vzniklá funkce bude mít předpis  $y = -\cosh x$ . Vyznačíme obory viz Obr. 4.14.



Obr. 4.14: Funkce dána rovnicí  $y = -e^{-x} - e^x$  a oborem proměnné  $(-\infty; -1) \cup \{1\}$

$\mathcal{D} = (-\infty; -1) \cup \{1\}$  a  $\mathcal{H} = (-\infty; -1, 5)$ .

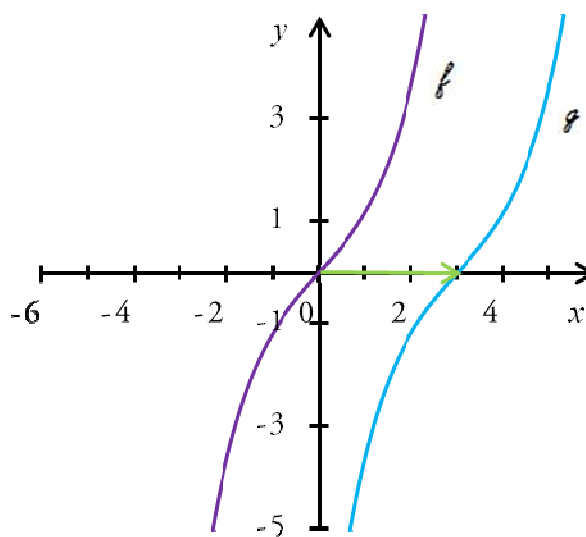
### b) Lineární úprava argumentu

Připomeňme, že na této třídě relací a funkcí si máme zopakovat a upevnit principy známé ze základního kurzu matematiky.

Graf funkce  $g : y = f(x - a)$  získáme z grafu funkce  $f : y = f(x)$  jeho posunutím ve vodorovném směru o délku  $a$ . Je-li  $a > 0$ , posuneme doprava, v případě  $a < 0$  doleva.

Ukázka: Získání grafu  $y = \sinh(x - 3)$

Narýsujeme graf funkce  $f : y = \sinh x$ . Protože je u hledaného grafu  $a > 0$ , posuneme funkci  $g$  doprava, což znázorňuje zelená šipka na Obr. 4.15.



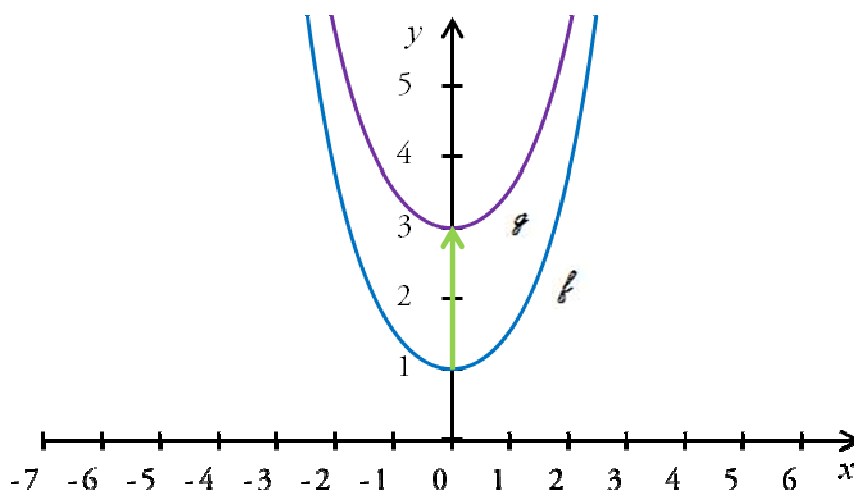
Obr. 4.15: Graf funkce  $f : y = \sinh x$  a  $g : y = \sinh(x-3)$

Cvičení: Sestrojte graf funkce  $y = \cosh(x+5)$  a  $y = \tanh(x-2)$

### c) Lineární úprava hodnoty funkce

Graf funkce  $g : y = b + f(x)$  získáme z grafu funkce  $f : y = f(x)$  jeho posunutím ve svislém směru o délku  $b$ . Je-li  $b > 0$ , posuneme nahoru, v případě  $b < 0$  dolů.

Ukázka: Získání grafu  $y = 2 + \cosh x$



Obr. 4.16: Graf funkce  $f : y = \cosh x$  a  $g : y = 2 + \cosh x$

Narýsujeme graf funkce  $f : y = \cosh x$ . Protože je u hledané funkce  $b > 0$ , posuneme funkci  $g$  nahoru (viz Obr. 4.16).

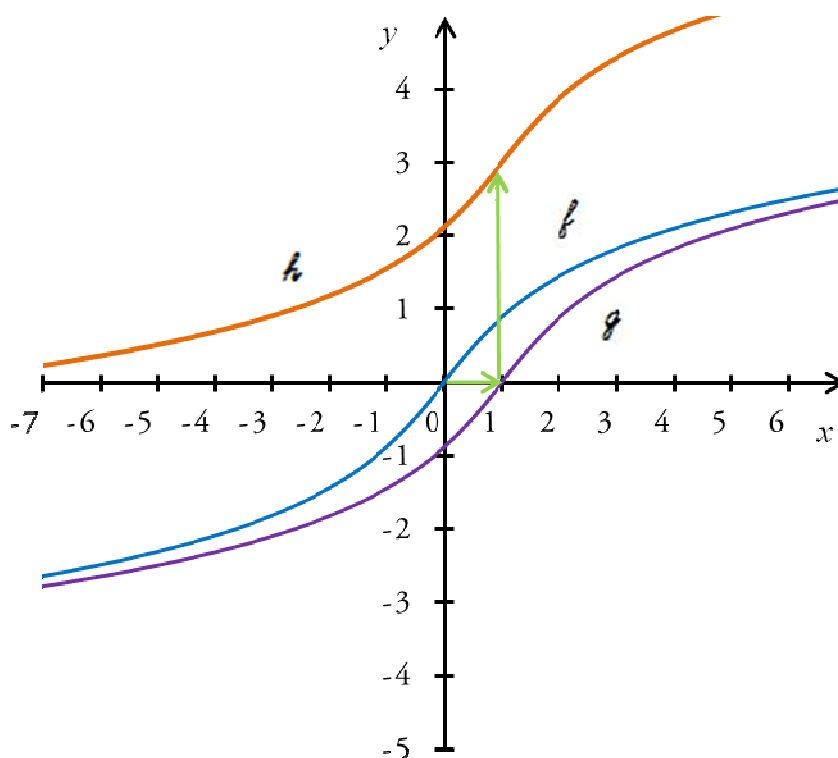
Cvičení: Sestrojte graf funkce  $y = -3 + \cosh x$ ;  $y = 2 + \tanh x$

#### d) Lineární úprava hodnoty argumentu a hodnoty funkce

Jde o kombinaci obou předchozích ukázek.

Graf funkce  $g : y = b + f(x - a)$  získáme z grafu funkce  $f : y = f(x)$  jeho posunutím ve vodorovném směru o délku  $a$  a ve svislém směru o délku  $b$ .

Ukázka: Získání grafu  $y = 3 + \operatorname{argsinh}(x - 1)$



Obr. 4.17: Grafy funkcí  $f : y = \operatorname{argsinh} x$ ,  $g : y = \operatorname{argsinh}(x - 1)$ ,

$$h : y = 3 + \operatorname{argsinh}(x - 1)$$

Narýsujeme graf funkce  $f : y = \operatorname{argsinh} x$ . Protože je u hledané funkce  $a > 0$ , posuneme funkci  $f$  doprava za vzniku funkce  $g$ . Z důvodu, že je u hledané funkce  $b > 0$ , posuneme funkci  $g$  nahoru a vznikne graf hledané funkce  $h$  (viz Obr. 4.17). Směr a velikost posunutí je v obrázku znázorněn fialovými šipkami.

Cvičení: Sestrojte graf funkce  $y = 2 + \cosh(x - 3)$ ;  $y = 1 + \tanh(x + 2)$

### e) Násobení funkce reálným číslem

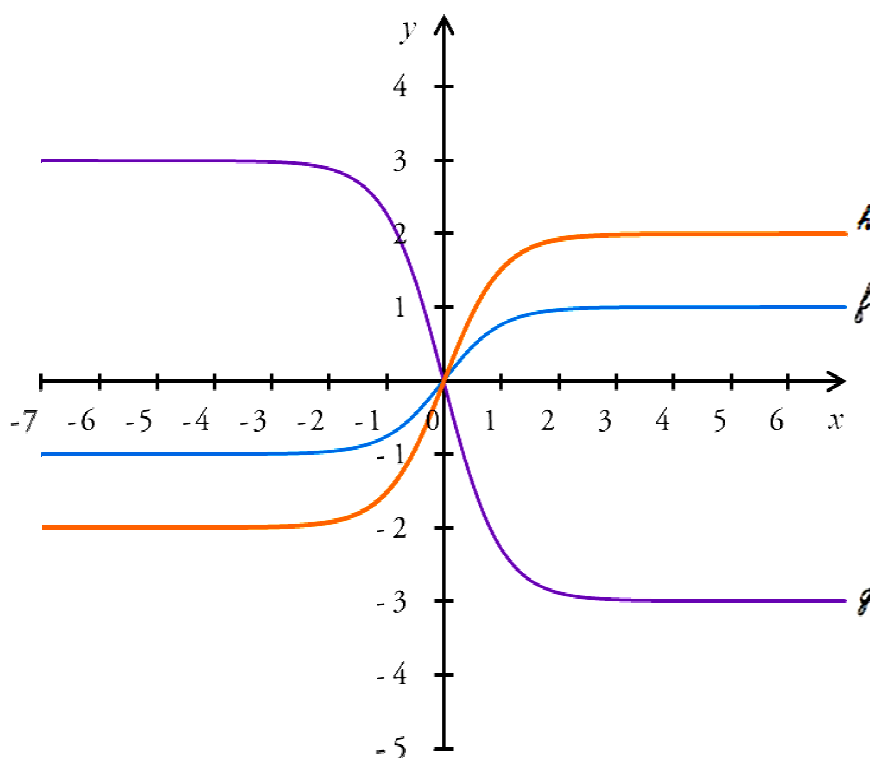
Graf funkce  $g : y = kf(x)$  získáme z grafu funkce  $f : y = f(x)$

a) buď tak, že měřítko svislé osy uděláme  $|k|$ -krát hustší

b) nebo tak, že  $y$ -ovou souřadnici všech bodů grafu zvětšíme  $|k|$ -krát

Pokud je  $k < 0$ , graf se ještě zobrazí v osové souměrnosti podle osy  $x$ .

Ukázka: Grafy funkcí  $f : y = \tanh x$ ,  $g : y = -3 \tanh x$  a  $h : y = 2 \tanh x$  zobrazíme do grafu, viz Obr. 4.18.



Obr. 4.18: Grafy funkcí  $f : y = \tanh x$ ,  $g : y = -3 \tanh x$  a  $h : y = 2 \tanh x$

Cvičení: Sestrojte graf funkce  $y = \cosh x$ ;  $y = \cosh(3x)$ ;  $y = \cosh(-2x)$ .

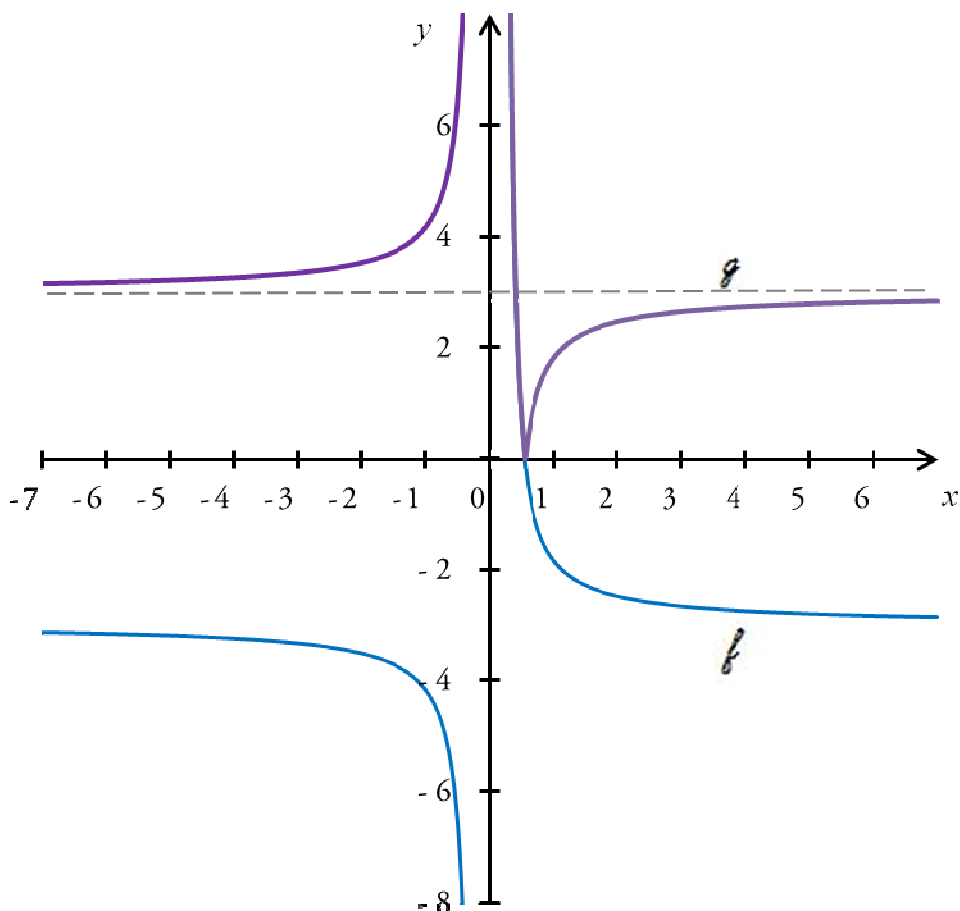
### f) Absolutní hodnota funkce

Graf funkce  $g : y = |f(x)|$  získáme z grafu funkce  $f : y = f(x)$  zobrazením

a) části grafu nad osou  $x$  v identitě (ponechat původní)

b) části grafu pod osou  $x$  v osové souměrnosti podle osy  $x$

Ukázka:  $y = |-3 + \operatorname{cosech} x|$  (Obr. 4.19)



Obr. 4.19: Grafy funkcí  $f : y = -3 + \operatorname{cosech} x$ ,  $g : y = |-3 + \operatorname{cosech} x|$

Cvičení: Sestrojte graf funkce, určete obory  $y = |2 + \operatorname{cotgh} x|$ ;  $y = |2 + \operatorname{argcosech} x|$ .

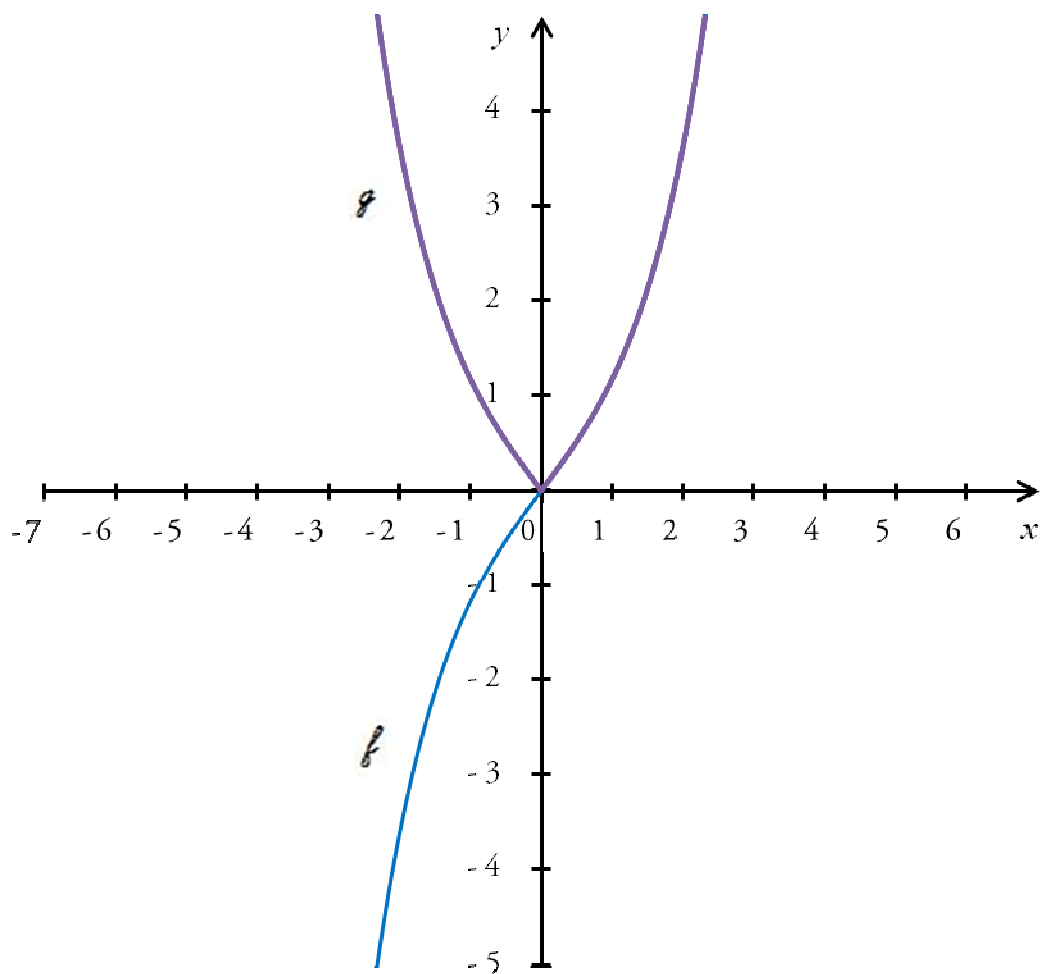
### g) Absolutní hodnota argumentu $x$

Graf funkce  $g : y = f|x|$  získáme z grafu funkce  $f : y = f(x)$  tak, že jej

a) vpravo od osy  $x$  zobrazíme v identitě (ponecháme na místě)

b) a zároveň vpravo od osy  $x$  zobrazíme v osové souměrnosti podle osy  $y$  doleva

Ukázka:  $y = \sinh|x|$  (viz Obr. 4.20)



Obr. 4.20: Grafy funkcí  $f : y = \sinh x$ ,  $g : y = \sinh|x|$

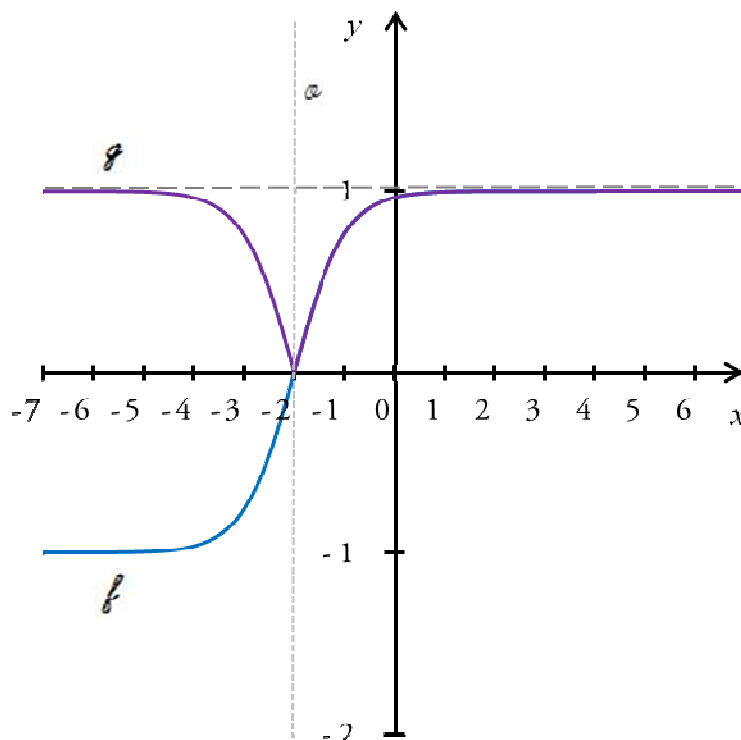
Cvičení: Sestrojte graf funkce, určete obory  $y = \cosh|x|$ ;  $y = \operatorname{arccotgh}|x+1|$ ;  $y = \operatorname{sech}|x|$ .

#### **h) Absolutní hodnota argumentu funkce**

Graf funkce  $g : y = f|x-a|$  získáme z grafu funkce  $f : y = f(x-a)$  tak, že jej

- vpravo od osy  $x = a$  zobrazíme v identitě (ponecháme na místě)
- a zároveň vpravo od osy  $x = a$  zobrazíme v osové souměrnosti podle osy  $x = a$  doleva

Ukázka:  $g : y = \operatorname{tgh}|x+2|$  (Obr. 4.21)



Obr. 4.21: Grafy funkcí  $f : y = \tanh(x+2)$ ,  $g : y = \tanh|x+2|$

Cvičení: Sestrojte graf funkce, určete obory  $y = \cosh|x-3|$ ;  $y = \operatorname{arccotgh}|x+1|$ ;  $y = \operatorname{sech}|x+4|$ .

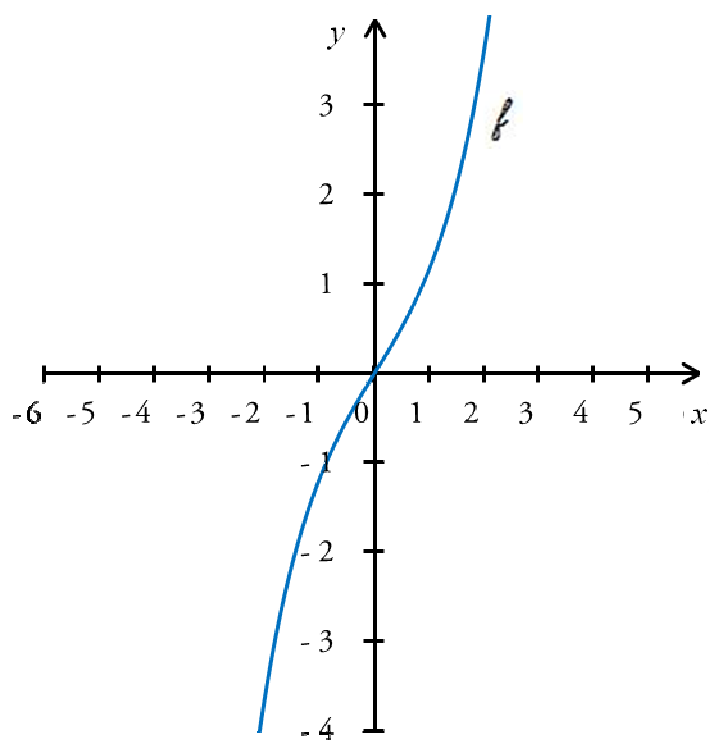
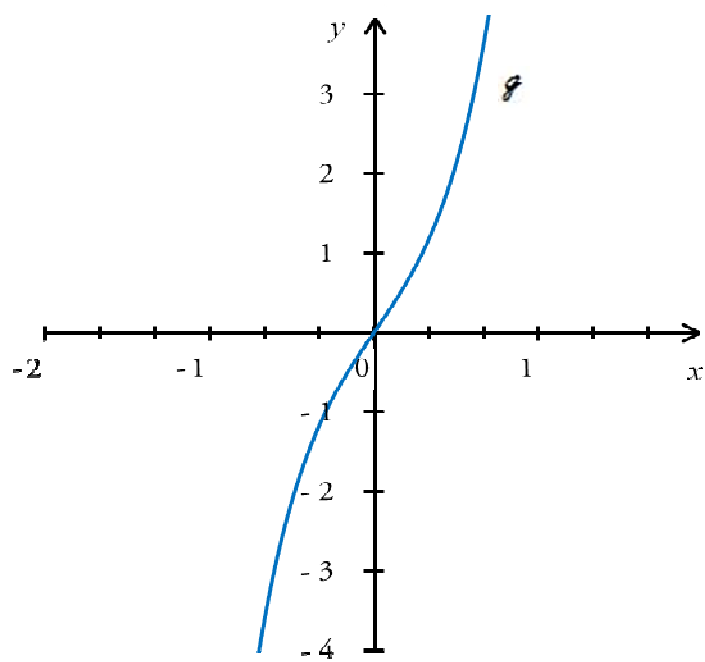
### i) Násobení argumentu reálným číslem

Vynásobení argumentu funkce reálným číslem  $m$  se projeví:

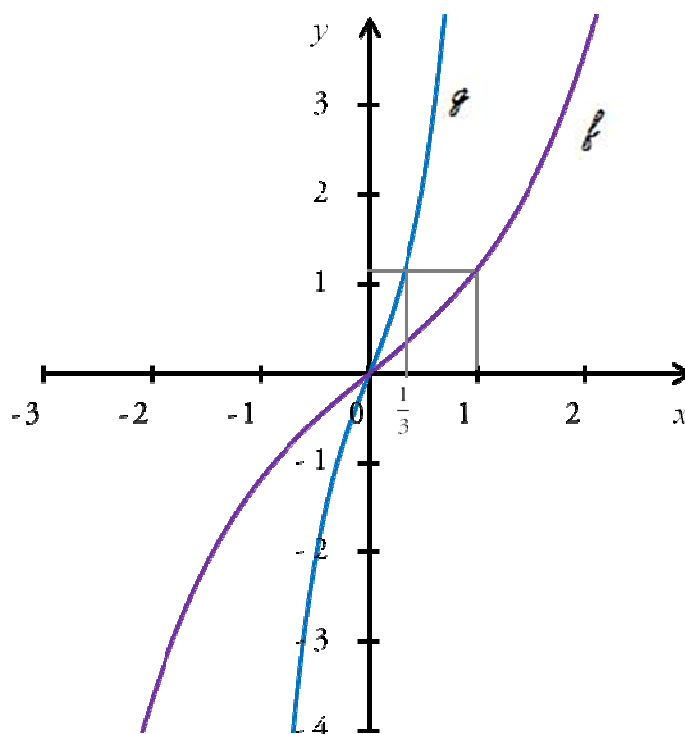
- a) buď zředěním měřítka osy  $x$   $|m|$ -krát (Obr. 4.22, Obr. 4.23)
- b) nebo zmenšením všech  $x$ -ových souřadnic všech bodů grafu  $|m|$ -krát

Ukázka:  $f : y = \sinh x$ ;  $g : y = \sinh(3x)$

Úlohu můžeme řešit zhuštěním měřítka. Po narysování grafu funkce  $f : y = \sinh x$  (Obr. 4.22), popis osy  $x$  upravíme tak, aby osa byla zhuštěná třikrát (Obr. 4.23). Alternativním postupem zmenšíme  $x$ -ové souřadnice všech bodů grafu třikrát, Obr. 4.24.

Obr. 4.22: Graf funkce  $f: y = \sinh x$ Obr. 4.23: Graf funkce  $g: y = \sinh(3x)$

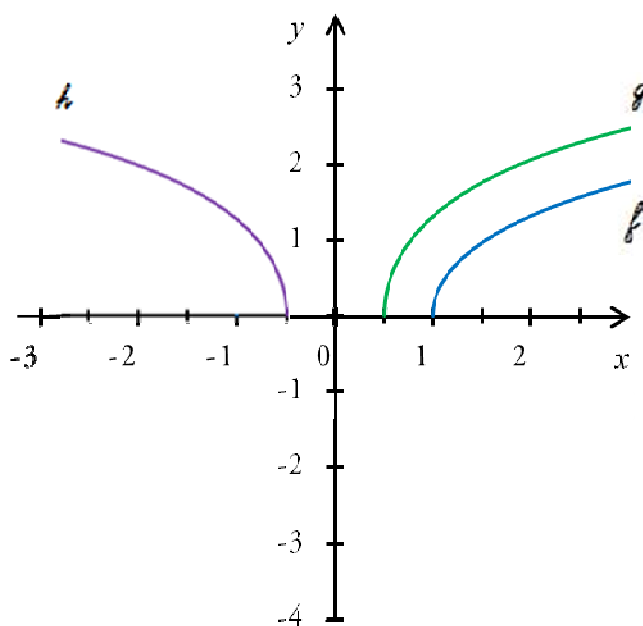




Obr. 4.24: Graf funkce  $f : y = \sinh x$ ,  $g : y = \sinh(3x)$

✓ Ukázka:  $f : y = \operatorname{argcosh} x$ ;  $g : y = \operatorname{argcosh}(2x)$ ;  $h : y = \operatorname{argcosh}(-2x)$

Řešení: Graf funkce  $f : y = \operatorname{argcosh} x$  získáme jako obraz grafu  $y = \cosh x$  v osové souměrnosti podle osy 1. a 3. kvadrantu.



Obr. 4.25: Graf funkcí  $f : y = \operatorname{argcosh} x$ ,  $g : y = \operatorname{argcosh}(2x)$  a  $h : y = \operatorname{argcosh}(-2x)$

Rozdělíme funkci na dvě části tak, aby vzniklá křivka byla skutečně funkcí, nikoli jen inverzní relací k funkci  $y = \cosh x$ . Vzniklá funkce  $f : y = \operatorname{argcosh} x$  je zobrazena na Obr. 4.25. Hledanou funkci  $g$  získáme nalezením funkčních hodnot pro vhodně zvolené  $x$  z rovnice  $y = \frac{x}{2}$  nebo funkci  $g$  zobrazíme pomocí šablony do nového grafu, kde upravíme měřítko osy  $x$  v závislosti na argumentu funkce. Dostatečným množstvím bodů následně proložíme výslednou křivku grafu funkce  $g$ . Graf funkce  $h$  získáme z grafu funkce  $g$  zobrazením v osově souměrnosti podle osy  $y$ .

Cvičení: Sestrojte graf funkce, určete obory:  $y = \cosh(3x)$ ;  $y = \operatorname{cotgh}(-2x)$ ;  $y = \operatorname{argtgh}(3x)$ .

#### j) Kombinace více jevů v rovnici funkce

Cvičení: Sestrojte graf funkcí a určete jejich obory:  $y = 3 + 2 \cosh(x - 2)$ ;  $y = 2 + \operatorname{argtgh}|x - 1|$ ;  $y = -3 + \operatorname{argsech}|x - 4|$ .

### 4.2.5 Grafické řešení rovnic a nerovnic

Při grafickém řešení rovnic si levou stranu a pravou stranu zvolíme za funkce, sestrojíme jejich grafy a určíme  $x$ -ové souřadnice jejich průsečíků.

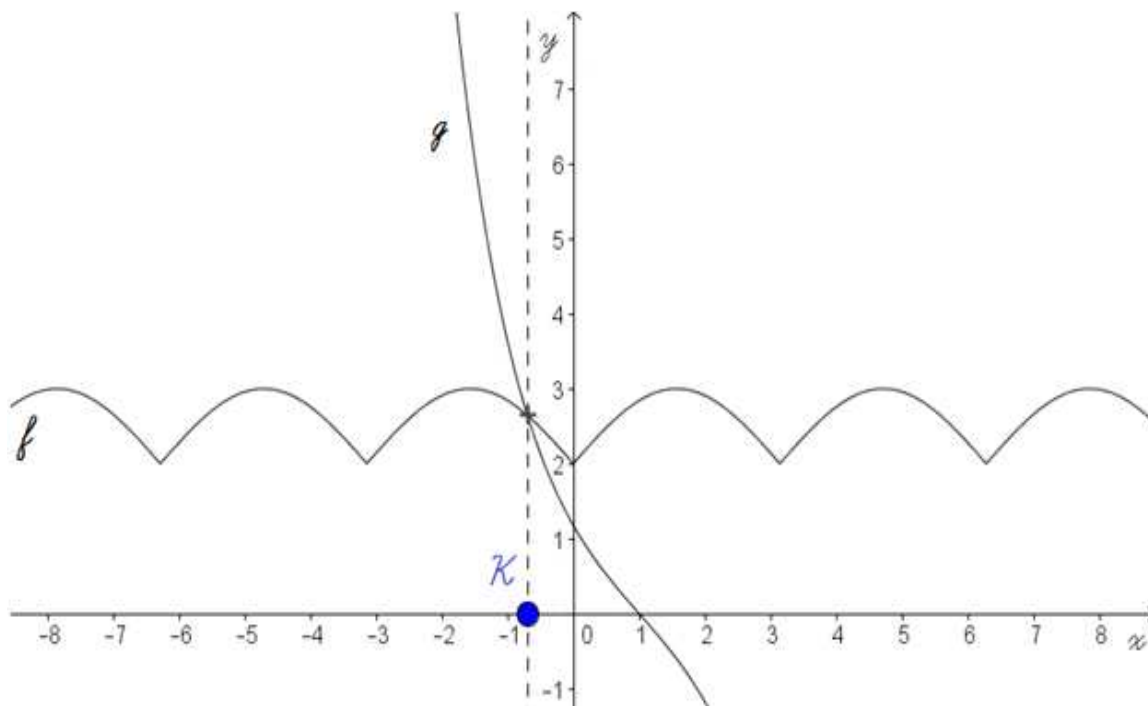
Při grafickém řešení nerovnic jsou tyto průsečíky obvykle krajními body intervalů kořenů.

Ovšem, u konkrétní rovnice či nerovnice může např. nastat situace, kdy úloha nemá řešení, protože průsečíky grafů vůbec nevzniknou. Oproti algebraickému výpočtu řešení bývá jen přibližné. Výhoda grafického řešení spočívá v tom, že přibližné kořeny jsme schopni získat vždy, když dovedeme sestrojit grafy obou stran; početní řešení oproti tomu často neumíme realizovat.

✓ Ukázka – rovnice včetně řešení:

Je dána rovnice:  $-\sinh(x-1) = |\sin x| + 2$  v oboru proměnné  $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ .

Řešení:



Obr. 4.26: Grafické řešení rovnice  $-\sinh(x-1) = |\sin x| + 2$

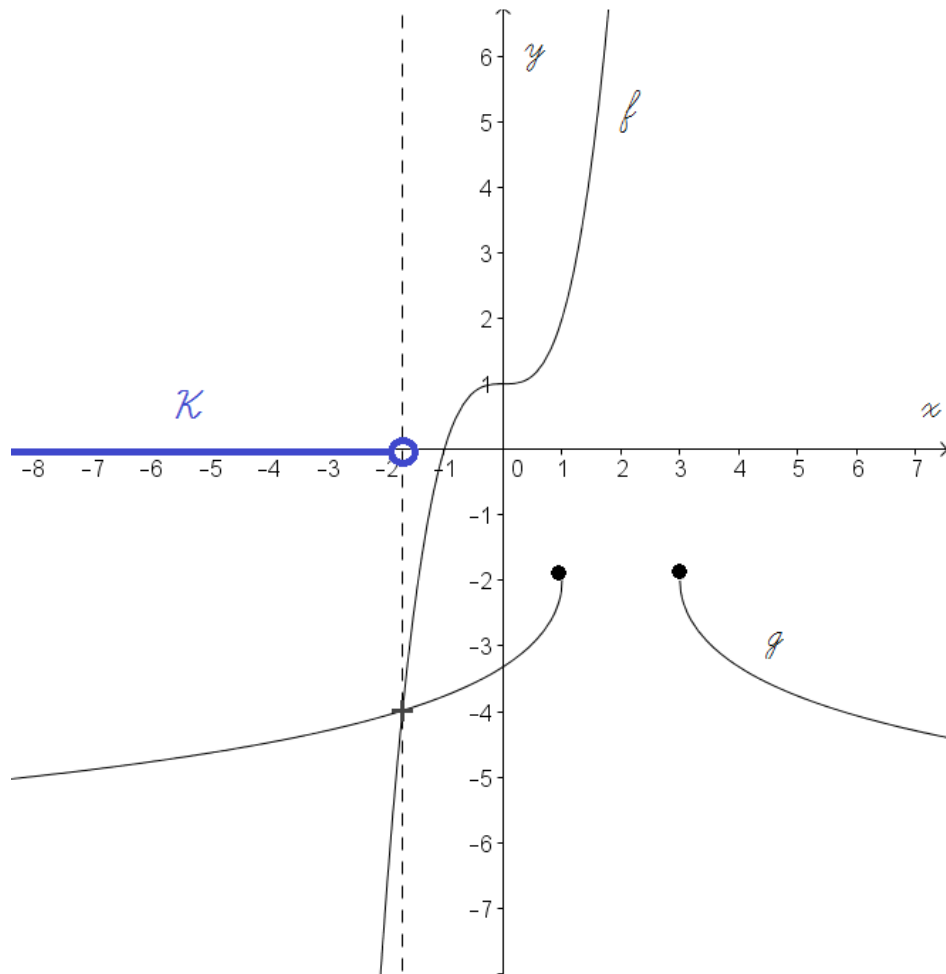
Sestrojíme grafy funkcí levé a pravé strany, a to na největších přípustných definičních oborech. Určíme  $x$ -ovou souřadnici všech průsečíků těchto grafů. Tím získáme obor kořenů, v našem konkrétním příkladu tedy  $\mathcal{K} = \{-0,7\}$  viz Obr. 4.26, kde  $f : y = |\sin x| + 2$  a  $g : y = -\sinh(x-1)$  v oboru proměnné  $\mathcal{O} = \mathbb{R}$ .

✓ Ukázka – nerovnice včetně řešení:

Je dána nerovnice:  $-2 - \operatorname{argcosh}|x-2| > x^3 + 1$ .

Řešení: Do společného systému souřadnic sestrojíme grafy funkcí zapsaných na levé a pravé straně nerovnice. Najdeme na ose  $x$  její část odpovídající tomu, že graf levé strany leží nad grafem pravé strany nerovnice. To je obor kořenů řešené nerovnice,

v našem případě interval  $\mathcal{K} = (-\infty; -2)$ , viz Obr. 4.27, kde  $f : y = x^3 + 1$  a  $g : y = -2 - \operatorname{argcosh}|x - 2|$ .



Obr. 4.27: Grafické řešení nerovnice  $-2 - \operatorname{argcosh}|x - 2| > x^3 + 1$

Cvičení: Řešte následující rovnice a nerovnice. Správnost si můžete ověřit například na adrese [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com), kde se po zadání rovnice či nerovnice zobrazí grafické řešení. Poznámka: hyperbolometrické funkce se vkládají do WolframAlpha se značením `arc`, nikoli značením, které jsme si zavedli, tj. `arg`. Například argument sinu hyperbolického budeme zapisovat jako `arcsinh`.

- 1)  $\operatorname{argsinh} x = |\sin x| + 2$
- 2)  $\operatorname{argsinh}(x - 3) \leq \ln(x + 3)$
- 3)  $-\sinh(x - 1) = |\sin x| + 2$
- 4)  $|\operatorname{argsinh}|x + 3|| < x^2 - 6x + 13$

- 5)  $\cosh(x+4) - 2 > \frac{3x-8}{x-3}$
- 6)  $-\operatorname{argsinh}(x-3) = \ln(x-1)$
- 7)  $\cosh(x-1) + 2 > \frac{2x+3}{x+2}$
- 8)  $\operatorname{argcosh}(x-2) = \cos(x+2)$
- 9)  $-\operatorname{argcosh}|x-2| > x^3 + 1$
- 10)  $|\operatorname{argsinh}|x+3|| < x^2 - 6x + 13$

### Úlohy k zamyšlení (bez nutnosti grafického a numerického řešení)

✓ Zadání:

Zapište definiční obor a obor kořenů rovnice  $\sinh x = \cosh x$ .

Odvoďte vztah pro inverzní funkci k tangentě hyperbolické.

Zapište definiční obor a obor kořenů nerovnice  $\tanh x \geq \cosh x$ .

Zapište definiční obor a obor kořenů nerovnice  $\frac{e^x}{2} < \cosh x$ .

Zapište definiční obor a obor kořenů nerovnice  $\frac{e^{-x}}{2} \geq \operatorname{argcosh} x$ .

Pro jakou hyperbolickou funkci platí, že pro každé  $t$  z oboru reálných čísel platí, že rovnice  $f(x) = t$  má pro každé  $t$  jediné řešení?

Zapište definiční obor a obor kořenů nerovnice  $\operatorname{sech} x < \cosh x$ .

Dokažte, že platí:  $\sinh x + \cosh x = e^x$  a  $\sinh x - \cosh x = -1$ .

## 5 Příprava a realizace kurzu

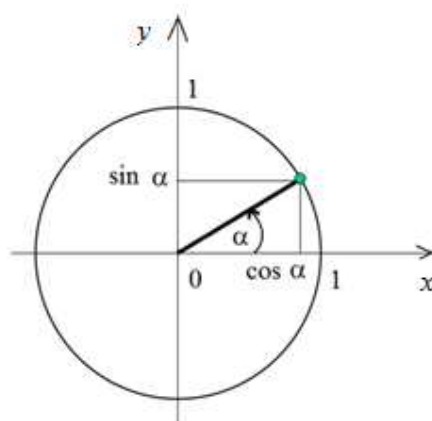
V této kapitole představujeme časový plán pro kurz předpokládající dotaci 14 výukových hodin. Každá hodina je rozdělena podle dílčích aktivit, u kterých je v závorce uvedena předpokládaná časová náročnost dané činnosti.

### 5.1 První hodina

✓ Úvod do tématu hyperbolických funkcí, úvodní výklad (28 minut)

Naším cílem je žáky motivovat<sup>14</sup> a zároveň jim vysvětlit, jak vznikl pojem hyperbolická funkce, jakou spojitost mají hyperbolické funkce s rovnoosou hyperbolou a goniometrickými funkcemi, které znají. Objasnit jim, co se stane, když jednotkovou kružnici v definici sinu a kosinu nahradíme rovnoosou jednotkovou hyperbolou, tak jak to roku 1761 ukázal Lambert.

Nejprve se zaměříme na jednotkovou kružnici a zopakování odvození goniometrických funkcí sinu a kosinu, viz Obr. 5.1.

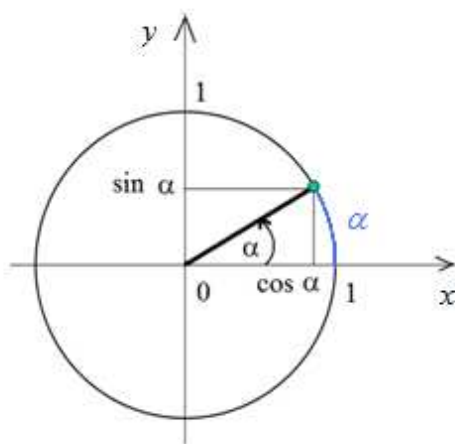


Obr. 5.1: Zavedení goniometrických funkcí jednotkovou kružnicí

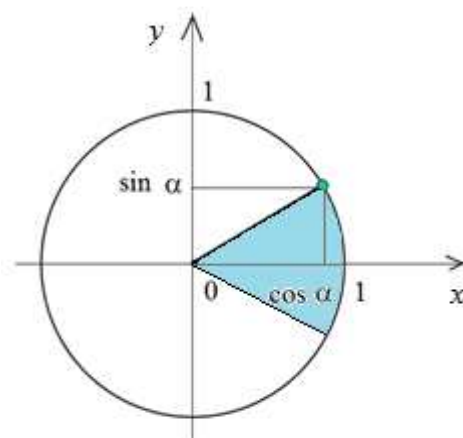
Zopakujeme s žáky význam veličiny  $\alpha$  v jednotkové kružnici, která má dva významy, které by žáci měli znát, tj. představuje velikost úhlu výseče, velikost oblouku

<sup>14</sup> Časový plán kurzu reflektuje velmi omezenou časovou dotaci tématu. Proto z hlediska motivace doporučujeme prostudovat především kapitolu 2.

výseče vyznačeného na Obr. 5.2. Dále ukážeme, že ale veličina  $\alpha$  vyjadřuje také dvojnásobek obsahu výseče (Obr. 5.3).



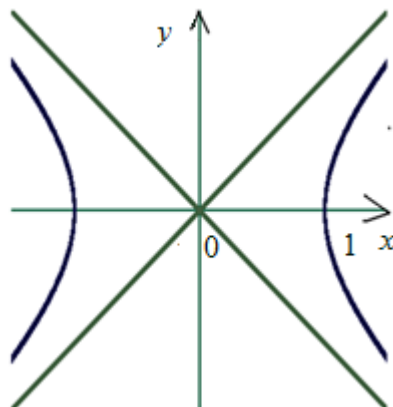
Obr. 5.2: Význam veličiny  $\alpha$  jako velikosti oblouku kruhové výseče



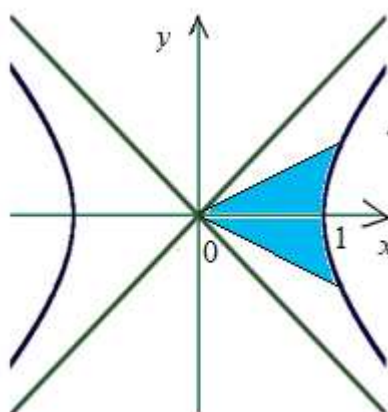
Obr. 5.3: Význam veličiny  $\alpha$  jako dvojnásobku obsahu kruhové výseče

Následně budeme s žáky hledat analogii s výsečí jednotkové kružnice (Obr. 5.5) a jednotkové rovnoosé hyperboly (viz Obr. 5.4).

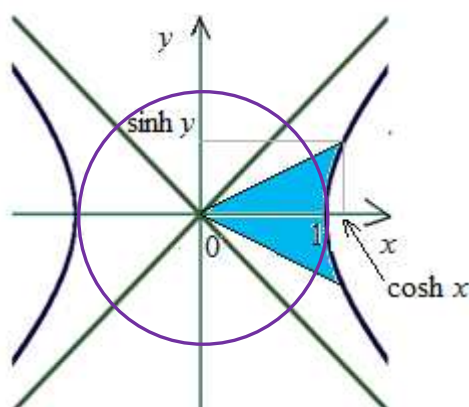
Na Obr. 5.6 je znázorněna jednotková rovnoosá hyperbola spolu s jednotkovou kružnicí. Z obrázku by mělo být patrné, že  $\alpha$  nepředstavuje úhel výseče jednotkové hyperboly například i proto, že obsahy vybarvené plochy výseče u jednotkové kružnice a jednotkové hyperboly na Obr. 5.6 mají zjevně různý obsah.



Obr. 5.4: Jednotková rovnoosá hyperbola



Obr. 5.5: Obsah hyperbolické výseče



Obr. 5.6: Jednotková rovnoosá hyperbola a jednotková kružnice

Poznamenejme, že barevně označená výseč jednotkové hyperboly má obsah rovný velikosti  $\alpha$ . Protože příslušná výseč na jednotkové kružnici má ovšem obsah zjevně



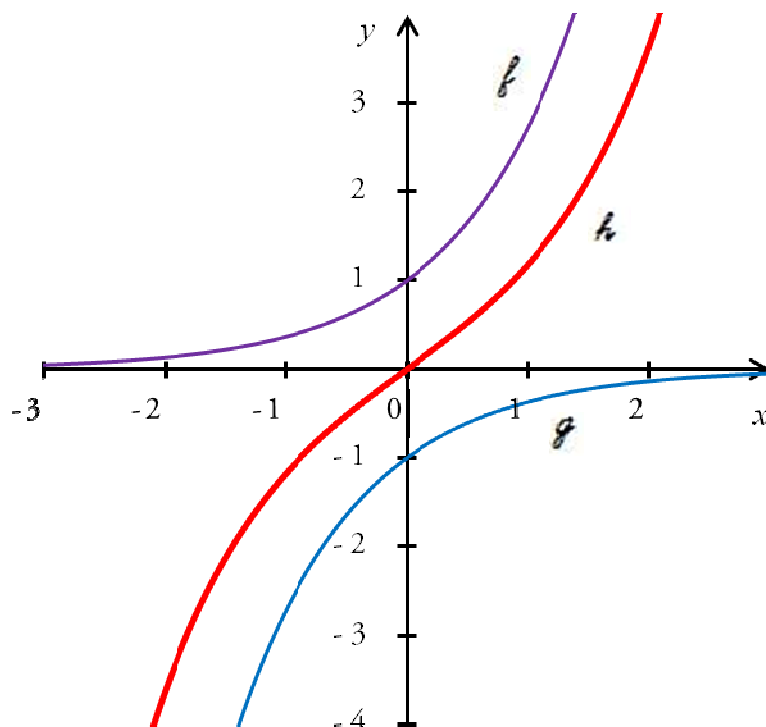
menší, tedy pro jednotkovou rovnosou hyperbolu veličina  $\alpha$  nemůže mít význam velikosti úhlu jako u jednotkové kružnice.

Dále poznamenejme, že jednotková kružnice se středem v počátku má rovnici  $x^2 + y^2 = 1$ , jednotková hyperbola má před otočením popsáním výše rovnici  $y = \frac{1}{2x}$ , po otočení  $x^2 - y^2 = 1$ .

Dále žáky seznámíme se vztahy pro hyperbolický sinus a kosinus v exponenciálním tvaru:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Při zápisu v prostředí MS Excel se ovšem exponenciální funkce zapisují ve tvarech  $\exp(x)$ ,  $\exp(-x)$ ,  $\exp(2x^2 + 5x - 7)$  atd., takže např. hyperbolický sinus se píše jako  $(\exp(x) - \exp(-x))/2$ , kde za  $x$  dosadíme adresu zdrojové buňky; konkrétně třeba „ $=(\exp(B3) - \exp(-B3))/2$ “.

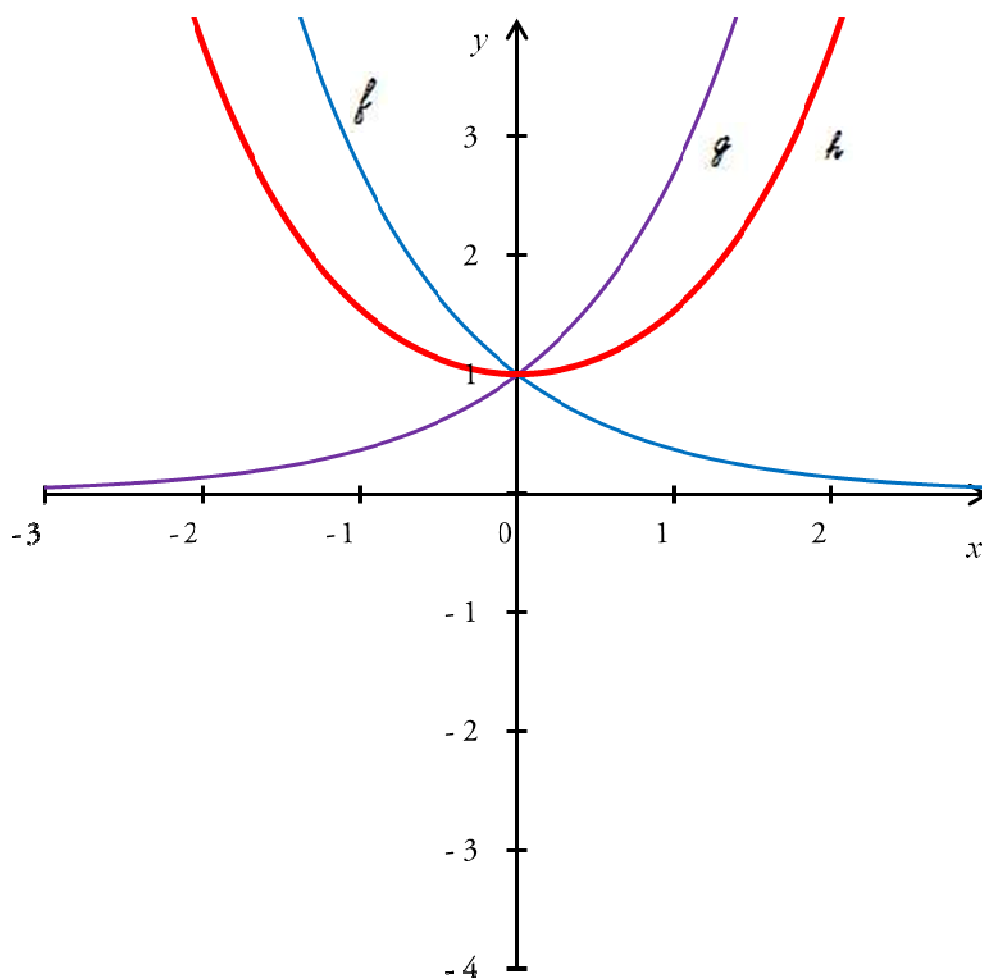


Obr. 5.7: Grafy funkcí  $f : y = \frac{e^x}{2}$ ,  $g : y = -\frac{e^{-x}}{2}$  a  $h : y = \sinh x$

Považujeme za vhodné dostatečně objasnit význam vzorce pro vyjádření sinu hyperbolického v exponenciálním tvaru (viz Obr. 5.7), což může být také průprava k tomu, aby si žáci odvodili vztah v exponenciálním tvaru pro kosinus hyperbolický sami na základě znalosti tvaru křivky kosinu hyperbolického.

Na dalším obrázku (Obr. 5.8) jsou znázorněny funkce, jejichž součtem a rozdílem se získá hyperbolický kosinus; snad to dobře ilustruje představu o jejich vzniku.

- Poznámka: První seznámení s tématem hyperbolických funkcí navrhujeme realizovat za pomoci prezentace v PowerPointu, která je uvedena jako příloha č. 1 této práce. Smysl vzorce pro kosinus hyperbolický v exponenciálním tvaru je patrný z Obr. 5.8.



Obr. 5.8: Graf funkcí  $f : y = \frac{e^x}{2}$ ,  $g : y = \frac{e^{-x}}{2}$  a  $h : y = \cosh x$

- ✓ Zadání domácích úkolů: vytvoření šablon sinu a kosinu hyperbolického, instalace Geogebra (5 minut)

Žáci dostanou za domácí úkol vytvořit si šablony dle vzoru na Obr. 4.3, který se jim ukáže a pošle po třídě. Rozdá se jim šablona vytisknutá z MS Wordu, která je přiložená jako příloha č. 2 k této práci, kterou si doma podleprí tvrdým papírem dle vzoru a vystříhnou, tak aby mohla být výsledná šablona použita k rýsování. Pro vyhlazení hrany šablony je doporučeno použít jemný smirkový papír.

- ✓ Cvičení (10 minut) a kontrola správnosti (2 minuty)

Úkolem je na kalkulačce vyčíslit výpis z funkce  $y = \sinh x$  v intervalu  $\mathcal{D} = \langle -4; 4 \rangle$ . Pak do sešitu sestrojíte ortogonální graf funkce.

Text pro samostatnou práci do školního sešitu při hodině:

Doplňte výpis z funkce  $y = \sinh x$  pomocí exponenciálního tvaru. Pak narýsujte ortogonální graf funkce. Měřítka osy  $x$  volte po 1 cm, měřítka osy  $y$  zvolte vhodně sami.

Soubor použitý ke kontrole v Geogebře je v příloze č. 3.

- Poznámka: Žáci případně toto cvičení dokončí za domácí úkol.

## 5.2 Druhá hodina

- ✓ Kontrola a oznámkování dokončených grafů funkce  $y = \sinh x$  ve školním sešitě, kontrola a oznámkování domácího úkolu – papírové šablony, prověrka – graf hyperbolického kosinu (15 minut)

Text prověrky:

Na kalkulačce vyčíslete výpis z funkce  $y = \cosh x$  v intervalu  $\mathcal{D} = \langle -4; 4 \rangle$ . Pak sestrojíte ortonormální graf funkce. Poznámka: Pokud máte hyperbolické funkce na

své kalkulačce, nepoužívejte je. Řešte přes exponenciální funkce. Účelem prověrky je také ověřit, že umíte na své kalkulačce vyčíslit příslušné funkce.

○ Poznámka: Předpokládaný čas 13 minut.

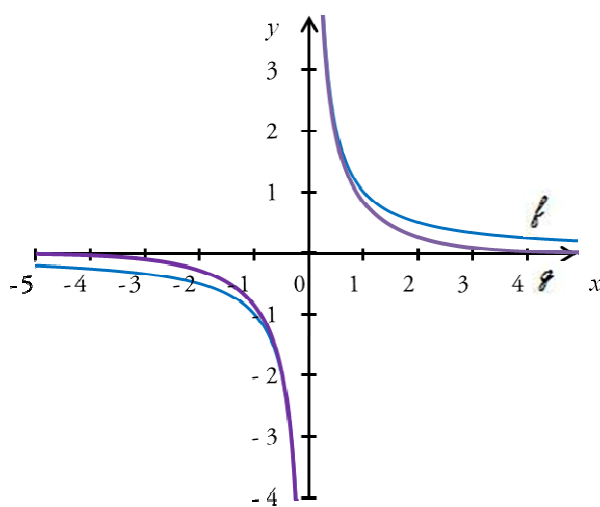
✓ Oprava prověrky (5 minut)

Správné řešení můžeme promítnout v Geogebře. Vzorové řešení je přílohou č. 4 k této práci.

✓ Další hyperbolické funkce (20 minut)

Uvedeme další hyperbolické funkce, konkrétně  $\operatorname{tgh}$ ,  $\operatorname{cotgh}$ ,  $\operatorname{sech}$ ,  $\operatorname{cosech}$ . Předvedeme vyjádření exponenciálního tvaru kosekanty hyperbolické a následné vytváření grafu kosekanty v Geogebře pomocí tabulky a vykreslování jednotlivých bodů funkce obdobně, jak je možné také vytvářet grafy funkcí v MS Excel pomocí tabulky.

○ Poznámka: Necháme žáky přemýšlet a diskutovat o tom, jakého je graf funkce typu (nejlépe které konkrétní funkce) jim graf kosekanty hyperbolické připomíná. Žáci by měli přijít na podobnost s lineárními lomenými funkcemi a to konkrétně nepřímou úměrností definovanou předpisem  $y = \frac{1}{x}$  (viz Obr. 5.9).



Obr. 5.9: Grafy funkcí  $f : y = \frac{1}{x}$  a  $g : y = \operatorname{cosech} x$

- ✓ Zadání 3 dalších grafů zbývajících hyperbolických funkcí jako žákovské domácí práce a referáty v obdobné podobě, jak byla řešena kosekanta hyperbolická.

- Poznámka: Referenti zašlou cvičný soubor ke kontrole. Při referátu jej ovšem nepoužijí, ale budou problém řešit do nového souboru. Preferováni jsou dobrovolníci.

### 5.3 Třetí hodina

- ✓ Žákovské referáty: Graf funkcí  $\tanh$ ,  $\coth$ ,  $\operatorname{sech}$  v Geogebře (24 minut, 3×8 minut)

- Poznámka: Tangens hyperbolický připomíná arkustangens, a co připomíná graf kosekanty hyperbolické? Horu Říp! Ukázka žákovských referátů v Geogebře je uvedena v příloze č. 5.

- ✓ Hyperbolické funkce a čeština (8 minut)

Doposud jsme s názvoslovím hyperbolických funkcí pracovali spíše intuitivně. Ve třetí hodině je nejvyšší čas se podívat podrobněji na názvosloví hyperbolických a hyperbolometrických a na jeho skloňování. Pro naše potřeby využijeme portálu [www.pravidla.cz](http://www.pravidla.cz), kde jsou pravidla českého pravopisu k dispozici zdarma on-line. Zjištění následně shrneme.

- ✓ Shrnutí – čeština (5 minut)

Funkce sinus a kosinus mají tvrdé neživotné mužské skloňování podle vzoru Hrad. Správné tvary jsou graf hyperbolického kosinu; graf hyperbolického kosinusu.

Funkce tangens, kotangens, sekans, kosekans mají dvě varianty skloňování. Mužské neskloňné a ženské tvrdé skloňování podle vzoru žena. Správné tvary jsou graf hyperbolického tangens, definiční obor hyperbolického sekans, graf hyperbolické tangenty, obor hodnot hyperbolické sekanty.

Nesprávné tvary jsou graf hyperbolického tangensu, definiční obor hyperbolického sekansu.

✓ Oprava prověrky z minulé hodiny (8 minut)

## 5.4 Čtvrtá hodina

✓ Posunutí grafu hyperbolické funkce, 5 ukázek (40 minut)

Řešíme gradované úlohy. Žáci určují definiční obor a obor hodnot funkcí zadaných funkčním předpisem a všechny tři funkce zobrazí do ortonormálního společného grafu pomocí šablon sinu a kosinu hyperbolického. V rámci této hodiny je cílem zopakovat především posunutí funkcí a význam absolutní hodnoty.

Text pro samostatnou práci do školního sešitu při hodině:

1)

f:  $y = \sinh x$

g:  $y = \sinh(x - 2)$

h:  $y = 5 + \sinh(x - 2)$

2)

f:  $y = \cosh x$

g:  $y = 4 + \cosh x$

h:  $y = 4 + \cosh(x - 2)$

3)

f:  $y = \sinh x$

g:  $y = 2 + \sinh x$

h:  $y = |2 + \sinh x|$

4)

f:  $y = \cosh x$

g:  $y = -3 + \cosh x$

$$h: y = |-3 + \cosh x|$$

5)

$$f: y = \sinh x$$

$$g: y = \sinh|x|$$

$$h: y = -3 + \sinh|x|$$

✓ Do společného obrázku sestrojte 3 grafy funkcí, určete definiční obory a obory hodnot: Zadání 8 žákovských referátů – Geogebra (5 minut)

Texty referátů:

1)

$$f: y = \sinh x$$

$$g: y = \sinh(x-2)$$

$$h: y = 4 + \sinh(x-2)$$

2)

$$f: y = \sinh x$$

$$g: y = -2 + \sinh x$$

$$h: y = -2 + \sinh(x-1)$$

3)

$$f: y = \cosh x$$

$$g: y = -3 + \cosh x$$

$$h: y = -3 + \cosh(x+2)$$

4)

$$f: y = \cosh x$$

$$g: y = \cosh(x-3)$$

$$h: y = 1 + \cosh(x-3)$$

5)

$$f: y = -\cosh x$$

$$g: y = 3 - \cosh x$$

$$h: y = |3 - \cosh x|$$

6)

$$f: y = \sinh(x - 2)$$

$$g: y = |\sinh(x - 2)|$$

$$h: y = 3 + |\sinh(x - 2)|$$

7)

$$f: y = -\sinh x$$

$$g: y = 3 - \sinh|x|$$

$$h: y = |3 - \sinh|x||$$

8)

$$f: y = \cosh(x + 1)$$

$$g: y = 3 - \cosh(x + 1)$$

$$h: y = |3 - \cosh(x + 1)|$$

## 5.5 Pátá hodina

✓ Grafy posunutých hyperbolických funkcí s absolutní hodnotou (45 minut)

Hodina je věnovaná opakování z předchozí hodiny. Věnujeme se tedy grafům posunutých hyperbolických funkcí a grafům hyperbolických funkcí s absolutní hodnotou a to s podporou žákovských referátů. Ukázky souborů v Geogebře použitých při referátech jsou uvedeny v příloze č. 7. Jeden žák řídí práci ostatních žáků během řešení gradované série funkcí, která mu byla zadána jako žákovský referát v předchozí hodině.



## 5.6 Šestá hodina

- ✓ Dokončení jednoho referátu z předchozí hodiny (5 minut)
- ✓ Hyperbolometrické relace a funkce, definice a ukázky: (5 minut)

Hyperbolometrické relace jsou inverzní relace k hyperbolickým funkcím. Dohodneme se, že je budeme značit  $\text{Arg}$ , pokud to nebudou funkce,  $\text{arg}$  značíme pak ty inverze nebo jejich části, které jsou funkcemi. Nazýváme je např. argument tangenty hyperbolické  $y = \text{argtgh } x$ . Zvláště je třeba dát pozor na  $\text{Argcosh } x$ , což je na svém definičním oboru dvojznačná relace. Za funkci  $y = \text{argcosh } x$  považujeme "horní polovinu" této relace.

V různých pramenech se tyto funkce nazývají a značí různě:

$\text{arc}$ ; tedy např.  $\text{arcsinh } x$ ; není to dobré, protože argument hyperbolických funkcí na rozdíl od argumentu goniometrických funkcí nemá význam délky oblouku ( $\text{oblouk} = \text{arcus}$ )

$\text{anti}$ ; tedy např.  $\text{anticosh } x$  (viz nápověda Geogebra)

$\text{ar}$ , např.  $\text{arsinh } x$

- ✓ Užití papírových šablon a Geogebra pro sestrojení  $\text{arsinh}$ ,  $\text{Argcosh}$ ,  $\text{argcosh}$  (10 minut)

Žáci sestavují grafy obou funkcí a dané relace do sešitu. Učitel může využít Geogebra k vykreslení výsledného grafu. Grafy v Geogebře nebudeme vykreslovat zadáním předpisu křivky, ale budeme zobrazovat inverzní relace a inverzní funkce konstrukčně pomocí osy 1. a 3. kvadrantu obdobným způsobem, jak to za pomoci šablon budou provádět žáci.

- ✓ Další hyperbolometrické funkce  $\text{argtgh}$ ,  $\text{argcotgh}$ ,  $\text{argsech}$ , a  $\text{argcosech}$  (10 minut)

Protože tyto hyperbolometrické funkce žáci nemohou sestavit pomocí šablon (nemají šablonu), předvedeme ukázkou v Geogebře a to opět konstrukčně pomocí zobrazení příslušné hyperbolické funkce v osově souměrnosti podle osy 1. a 3. kvadrantu. Žáci si grafy načrtávají od ruky.

✓ Odvození rovnic hyperbolometrických funkcí (15 minut)

S žáky postupně odvodíme vztah  $y = \operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  platící pro argument hyperbolického sinu a  $y = \operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$  platící pro argument hyperbolického kosinu. Za domácí úkol si žáci zkusí analogicky odvodit vztah platící pro argument tangenty hyperbolické.

Pro úplnost uvádíme odvození pro  $\sinh x$ .

Vyjádříme funkci  $\sinh x$  pomocí exponenciálního vzorce:  $\sinh x = y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

Inverzi dostaneme záměnou  $x$  a  $y$ , čímž vznikne  $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ .

Rovnici vynásobíme  $2e^y$ , čímž dostaneme  $2xe^y = (e^y - e^{-y})e^y$ , což je po roznásobení pravé strany  $2xe^y = e^{2y} - 1$ . Po úpravě získáme:  $0 = e^{2y} - 2xe^y - 1$ .

Řešíme kvadratickou rovnici  $0 = z^2 - 2xz - 1$ , kde  $z = e^y$ . Dostáváme tedy

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}, \text{ tedy po úpravě } e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Protože  $e^y > 0$ , musíme brát v úvahu pouze vztah  $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ , který zlogaritmujeme.  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  je hledaným vztahem pro vyjádření argumentu hyperbolického sinu.

Analogické odvození provedeme i pro argument hyperbolického kosinu.

## 5.7 Sedmá hodina

### ✓ Prověрка (13 minut)

Obsahuje 2 gradované úlohy na posunutí a absolutní hodnoty funkcí

### ✓ Dokončení žákovských referátů z minulé hodiny (5 minut)

### ✓ Argument tangenty hyperbolické (5 minut)

Odvodíme rovnici s přirozeným logaritmem pro argument hyperbolické tangenty a zobrazíme argument hyperbolické tangenty v Geogebře.

Vyjádříme  $\tanh x$  pomocí exponenciálního vzorce:  $\tanh x = y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ . Inverzi

dostaneme záměnou  $x$  a  $y$ , čímž dostaneme  $x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$

Zlomek rozšíříme  $e^y$ , čímž získáme  $x = \frac{(e^y - e^{-y})e^y}{(e^{2y} + e^{-y})e^y}$ , což je po roznásobení

$x = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$ . Odstraníme zlomek:  $x(e^{2y} + 1) = e^{2y} - 1$ .

Roznásobíme závorky a přeskupíme členy:  $e^{2y}(x - 1) = -x - 1$ . Osamostatníme

exponenciální člen:  $e^{2y} = \frac{-x - 1}{x - 1} = \frac{x + 1}{1 - x}$ .

Zlogaritmujeeme při Eulerově základu:  $2y \ln e = \ln \frac{x + 1}{1 - x}$  pro  $|x| < 1$ . Dostáváme tak

standardní rovnici funkce:  $y = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{1 - x}$ .

### ✓ Parabola versus řetězovka (10 minut)

Využijeme znalostí žáků ohledně vlastností paraboly, které ovlivňují koeficienty kvadratické rovnice. Objasníme, proč nemůže být při libovolné úpravě velikostí koeficientů kvadratické rovnice parabola totožná s řetězovkou, kterou nejlépe ukážeme na názorné ukázce obdobně jako na Obr. 5.10 (zdroj: archiv autora). Odů-

vodnění je uvedeno v kapitole 2. K objasnění můžeme použít soubor v Geogebře z přílohy č. 6.

Objasníme význam koeficientu  $a$  v rovnici řetězovky, se kterou žáky seznámíme. Je dobré upozornit na to, že obdobně jak je tomu u polynomických funkcí, jsou jednotlivé hyperbolické funkce svým průběhem podobné různým funkcím od kvadratických až po lineární lomené funkce (jak jsme si ostatně v předchozích hodinách ukazovali například na kosekantě hyperbolické).



Obr. 5.10: Řetězovka

#### ✓ Grafické řešení rovnic a nerovnic (15 minut)

Při grafickém řešení rovnic si levou stranu a pravou stranu zvolíme za funkce, sestrojíme jejich grafy a určíme  $x$ -ové souřadnice jejich průsečíků.

Při grafickém řešení nerovnic jsou průsečíky grafů obvykle krajními body intervalů kořenů.

Výhoda grafického řešení spočívá v tom, že přibližné kořeny jsme schopni získat vždy, když dovedeme sestavit grafy obou stran; početní řešení oproti tomu často neumíme realizovat. Oproti algebraickému výpočtu grafické řešení bývá jen přibližné.

Ovšem, u konkrétní rovnice či nerovnice může např. nastat situace, kdy grafy nemají společný bod a úloha nemá řešení.

- Poznámka: Zdůrazníme, že definiční obor rovnice či nerovnice určíme jako průnik definičního oboru funkcí levé a pravé strany rovnice či nerovnice.

Vyřešíme vzorové příklady s jednou rovnicí a nerovnicí.

Rozdáme zadání série úloh:

Řešte rovnice nebo nerovnice v  $R$ . Zapište a zakreslete definiční obor a obor kořenů.

- 1)  $\operatorname{argsinh} x = |\sin x| + 2$
- 2)  $-\sinh(x-1) = |\sin x| + 2$
- 3)  $\operatorname{argcosh}(x-2) = \cos(x+2)$
- 4)  $-\operatorname{argcosh}|x-2| > x^3 + 1$
- 5)  $\cosh(x-2) = x^3 + 1$
- 6)  $-2 - \operatorname{argcosh}|x-2| > x^3 + 1$
- 7)  $3 - \cosh|x-2| \leq x^3 - 1$
- 8)  $\operatorname{argcosh}|x-2| - 3 > x^3 + 1$
- 9)  $\operatorname{argsinh}|x+1| + 2 > x^2 + 2x - 3$
- 10)  $\sinh|x+1| + 2 > x^2 + 2x - 3$
- 11)  $|\operatorname{argsinh}|x+3|| < x^3 - 1$
- 12)  $|\sinh|x+3|| < x^3 + 2$
- 13)  $-\operatorname{argcosh}(x-1) + 3 < \frac{2x+3}{x+2}$
- 14)  $\cosh(x-1) + 2 > \frac{2x+3}{x+2}$
- 15)  $2 + \operatorname{argcosh}|x-1| \leq \frac{3x-11}{x-4}$
- 16)  $|\operatorname{argsinh}|x+3|| < x^2 - 6x + 13$
- 17)  $|\sinh|x-1|| > 0,5x^2 - x - 1$
- 18)  $-\operatorname{argsinh}(x-3) = \ln(x-1)$
- 19)  $-\sinh(x+3) = \ln(x+1)$
- 20)  $\operatorname{argcosh}(x) > x+1$
- 21)  $\operatorname{argcosh}(x+3) - 2 > \frac{3x-8}{x-3}$
- 22)  $\operatorname{argsinh}(x-3) \leq \ln(x+3)$
- 23)  $3 + \sinh(x+1) < -\ln(x+3)$
- 24)  $-2 + \operatorname{argsinh}(x+1) < -\ln(x+3)$
- 25)  $\operatorname{argsinh}(x) - 1 > \operatorname{argcosh}(x)$

- 26)  $3 + \operatorname{argcosh}(x-1) > x+1$   
 27)  $-3 - \operatorname{argcosh} x > -2x-1$   
 28)  $4 - \operatorname{argcosh}|x| = 2x^2 - 8x + 13$   
 29)  $-1 - \cosh|x-2| = 2x^2 - 8x + 13$   
 30)  $\cosh(x+4) - 2 > \frac{3x-8}{x-3}$   
 31)  $2 + \cosh|x-3| \geq \frac{3x-11}{x-4}$

## 5.8 Osmá hodina

- ✓ Výklad a ukázky: Grafické řešení rovnic a nerovnic – 2. část (45 minut).

V lavicích žáci řeší zadané rovnice a nerovnice s hyperbolickými a hyperbolometrickými funkcemi graficky pomocí papírových šablon. Kontrola je prováděna za pomoci Geogebry.

- Některé předpřipravené soubory v příloze č. 14 určené ke kontrole v Geogebře byly upravovány až v průběhu hodiny, pokud byly vůbec použity.

## 5.9 Devátá hodina

- ✓ Posunutí a absolutní hodnoty u hyperbolometrických funkcí (20 minut)  
 ✓ Výklad a ukázky: Grafické řešení rovnic a nerovnic – 3. část Posunutí a absolutní hodnoty u hyperbolometrických funkcí (25 minut)

## 5.10 Desátá hodina

- ✓ Zadání žákovských referátů: 3× posunutí hyperbolometrických funkcí, 5× rovnice a 5× nerovnice (5 minut)

1) až 3) Do společného obrázku sestrojte grafy 4 funkcí. Zapište jejich definiční obory a obory hodnot.

- 1)  $f : y = \operatorname{argsinh}(x)$   
 $g : y = \operatorname{argsinh}|x|$

$$h : y = -2 + \operatorname{argsinh}|x|$$

$$k : y = |-2 + \operatorname{argsinh}|x||$$

$$2) \quad f : y = \operatorname{argcosh}(x)$$

$$g : y = \operatorname{argcosh}|x|$$

$$h : y = -2 + \operatorname{argcosh}|x|$$

$$k : y = |-2 + \operatorname{argcosh}|x||$$

$$3) \quad f : y = -\operatorname{argsinh}(x)$$

$$g : y = 2 - \operatorname{argsinh}(x)$$

$$h : y = |2 - \operatorname{argsinh}(x)|$$

4) až 8) Graficky řešte rovnici a nerovnici v oboru reálných čísel. Zapište definiční obor. Zakreslete a přibližně odhadnutými mezemi zapište obor kořenů. Vytvořte 3 dokumenty Geogebry - základní, pro rovnici a pro nerovnici, v posledních dvou zakreslete obory kořenů.

$$4) \quad \text{a) } \operatorname{arctg} x = -3 + \cosh x$$

$$\text{b) } \operatorname{arctg} x > -3 + \cosh x$$

$$5) \quad \text{a) } 3 + \operatorname{argsinh} x = x^2$$

$$\text{b) } 3 + \operatorname{argsinh} x \leq x^2$$

$$6) \quad \text{a) } \sinh x = \frac{1}{x-2}$$

$$\text{b) } \sinh x \geq \frac{1}{x-2}$$

$$7) \quad \text{a) } 3 - \operatorname{argcosh}(x-2) = \frac{1}{x}$$

$$\text{b) } 3 - \operatorname{argcosh}(x-2) \leq \frac{1}{x}$$

$$8) \quad \text{a) } e^x = 3 - \cosh x$$

$$\text{b) } e^x < 3 - \cosh x$$

o Poznámka: Referující žák úlohu řeší připravenými soubory Geogebry jako při předchozích ukázkách, žáci v lavicích užijí šablon.

✓ Přehled hyperbolických a hyperbolometrických funkcí (40 minut)

v Geogebře

ve Visual Basicu (viz příloha č. 9)

v Excelu (můžeme využít a modifikovat program v příloze č. 8)

v HTML (tabulka názvů a oborů viz příloha č. 13)

Podrobný přehled

- Domácí úkol: Do školního sešitu vytvořit katalog hyperbolických a hyperbolometrických funkcí.
- Poznámka 1: Jde o to, aby si žák vlastní píli vyhledal ve školním sešitě, na Internetu a v dalších pramenech základní informace o šesti hyperbolických a šesti hyperbolometrických funkcích a sestavil z nich přehled. Autentická ukázka takového přehledu z žakovského sešitu je uvedena jako příloha č. 17 a č. 18. Z ní je zřejmé, že v tomto přehledu se žáci dopouštěli chyb; třeba poslední dvě funkce v přehledu jsou opatřeny nesprávným vzorcem, názvy funkcí v české transkripci mají začínat kosinus a kotangens místo cosinus a cotangens.
- Poznámka 2: Tento katalog mohli žáci používat při závěrečné písemné práci.

### 5.11 Jedenáctá hodina

✓ Grafy hyperbolometrických funkcí, cvičení s podporou žakovských referátů (45 minut)

### 5.12 Dvanáctá hodina

✓ Grafické řešení rovnic a nerovnic obsahující hyperbolometrické funkce, cvičení s podporou žakovských referátů (45 minut)



### 5.13 Třináctá hodina

- ✓ Opakování grafického řešení rovnic a nerovnic, cvičení s podporou žákovských referátů (45 minut)

### 5.14 Čtrnáctá hodina

- ✓ Závěrečná písemná práce (45 minut)

### 5.15 Poznámky po realizaci kurzu

Kurz se lišil od běžné výuky tím, že tvůrčí činnost žáků byla podstatnou částí uskutečněných hodin, například při konstrukcích grafů „neznámých“ funkcí, kdy žáci bez podpory grafických programů vytvářeli grafy funkcí a teprve následně si je pomocí výukového programu Geogebra kontrolovali. Všem žákům se grafy podařilo správně vytvořit a vytvářeli je se zaujetím. Skupina žáků, se kterými se pracovalo, nebyla zvyklá na referáty, ve kterých referent vede ostatní spolužáky při řešení problému. Tuto roli vnímali velmi pozitivně a dokonce se na realizaci svých referátů těšili. Jejich referáty byly součástí výuky, ale i klasifikovaným výstupem. Referáty probíhaly s podporou Geogebry, která byla pro některé žáky známá z předchozí výuky. Asi třetina žáků deklarovala, že se s tímto programem nesetkala, ale s jejím využitím neměla problémy.

Každému žákovi byla v průběhu kurzu přidělena jednoduchá úloha, kterou si doma připravil, vytvořil si elektronický soubor pro podporu výuky a svým kolegům úlohu prezentoval jako malý referát. Ostatní žáci přitom úlohu také řešili do svých školních sešitů. Během našeho kurzu měl každý člen skupiny jeden až dva takové referáty. Přípravu žáci zasílali e-mailem vyučujícímu k předběžné kontrole. Tato prostá forma e-learningu se žákům líbila a osvědčila se. Některé elektronické materiály vytvořené žáky jsou uvedeny v přílohách.

Referáty žáků nebyly zcela bezchybné, ale na většinu drobných nedostatků, které se v referátech vyskytly, upozornili ostatní kolegové při rozboru referátů. Zmínit můžeme například situaci, kdy měl referující žák za úkol shrnout, jaký průběh má funkce argument kosekanty hyperbolické. Referující žák prohlásil, že argument kosekanty hyperbolické je klesající na intervalu  $(-\infty; \infty)$  místo konstatování, že graf funkce má v  $x = 0$  asymptotu a že tedy je graf funkce klesající na intervalu  $(-\infty; 0)$  a na intervalu  $(0; +\infty)$ .

Referáty jsme obvykle známkovali výborně i v případě nezávažných chyb, čímž jsme podnítli otevřené reakce spolužáků. Žáci nepochybně také komunikovali o úlohách i mimo vyučování, což posílilo ideu kolektivní práce nad problémy.

Dále jsme kladli důraz na to, aby žáci hovořili správně česky, nahlas, zřetelně, užívali správných odborných termínů. Na verbální podněty učitele žáci reagovali přiměřeně a pohotově. Situace, kdy žák na podnět učitele nereagoval vůbec nebo nereagoval správně, byly spíše vzácné.

V rámci výuky jsme se také cíleně zaměřili na pojem funkce, aby žáci bezpečně poznali, co graf funkce je a naopak co není. Jak nám potvrdila analýza prověrek, kde se pouze ve dvou ojedinělých případech objevil objekt, který měla být, ale ve skutečnosti nebyl funkcí, se zdá, že žáci rozdílu mezi relací a funkcí rozumějí.

Největší problémy žáků v průběhu kurzu způsobovala absolutní hodnota, kde také často chybovali v rámci písemných výstupů. Dodejme ještě, že v rámci inverzních funkcí součástí písemných výstupů nebyly hyperbolické ani hyperbolometrické funkce, které by měly v argumentu násobek  $x$ . Zopakována však tato problematika byla. Obecná zjištění především analýzou prověrek shrnujeme v kapitole 6. Upozorňujeme, že v tomto kurzu a v této skupině žáků nebylo cílem zadávat prověrky bezprostředně další hodinu po probrání látky. Především u posledních prověrek byl mezi výkladem, referáty s procvičením a prověrkou vždy dostatečný časový odstup, aby žáci měli čas si doplnit, procvičit a upevnit probranou látku. Pak také nedochá-

zelo k tomu, že by se žáci mohli omlouvat z prověrek kvůli předchozí nepřítomnosti. Všechny prověrky tedy nakonec psali vždy všichni přítomní a absence na výuce byla menší než obvykle. Dokonce některé prověrky psali všichni členové skupiny. Obsah každé prověrky se velmi podobal úlohám zadaným pro domácí přípravu. Z tohoto důvodu jsme 3. a 4. prověrku do plánu jednotlivých hodin nezařadili především s vědomím toho, že prověrku je třeba zadávat na základě dalších okolností, které ovlivňují například i složení skupiny žáků kurzu.

## 6 Evaluace výuky

V průběhu výuky tématu hyperbolických funkcí byly žáky postupně použity čtyři dílčí prověrky a závěrečné písemné práce na celou vyučovací hodinu (40 minut čistého času). Závěrečná písemná práce obsahovala úlohy obdobné úlohám z dílčích prověrek. Žáci byli před prověrkami rozloženi tak, aby každý žák seděl ve zvláštní lavici a bylo tak zajištěno, že žáci od sebe nemohli opisovat. Přehled klasifikace žáků z těchto prověrek je uveden v příloze č. 16. Upozorňujeme, že tento přehled je anonymizován prostřednictvím čísel a změnou pořadí žáků v tabulce tak, aby pořadí žáků neodpovídalo skutečnému abecednímu seznamu dané skupiny žáků. V následné analýze prověrek i z tohoto důvodu nerozlišujeme žáka od žákyně a hovoříme obecně o žákovi.

Vzorové řešení jsme vytvořili z výborných prací žáků a uvádíme je v příloze č. 10; pro každou prověrku je vytvořen zvláštní soubor s naskenovaným řešením ve formátu pdf.

### 6.1 První prověrka

#### ✓ Zadání

Doplňte výpis z funkce  $y = \cosh x$  pomocí exponenciálního tvaru, hodnoty zaokrouhlete na 1 desetinné místo. Pak narýsujte ortogonální graf funkce. Měřítka osy x volte po 1 cm, měřítka osy y zvolte vhodně sami.

x	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
y										

#### ✓ Komentář

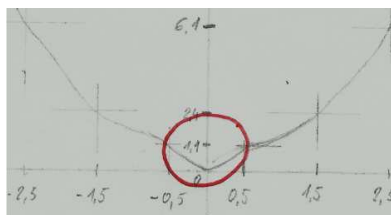
Na prověrku bylo vyčleněno 13 minut a zúčastnilo se jí všech 19 žáků kurzu.

V první prověrce, kterou žáci absolvovali, jsme si kladli za primární cíl ověřit, zda žáci ovládají vyčíslovat na kalkulačce vztahy v exponenciálním tvaru, kterým je definován hyperbolický kosinus  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . V hodině jsme řešili vyčíslování hyperbolického sinu a v prověrce tedy kosinu hyperbolického. Dále jsme zkoumali, zda žáci dovedou zvolit vhodné měřítko grafu a z výpisu funkce vyznačit do grafu příslušné body, a poté je proložit křivkou odpovídající hyperbolické funkci  $y = \cosh x$ , s jejímž tvarem se seznámili v předchozí hodině a jejíž znalost měla být jednoznačným vodítkem k tomu, aby výsledný graf odpovídal příslušné hyperbolické funkci.

Druhotným cílem bylo zjistit, zda žáci správně rozumějí pojmu zaokrouhlit číslo. Zaokrouhlováním čísel jsme se sice v předchozí hodině explicitně nezabývali, ale žáci by pojmu měli bezpečně rozumět. Navíc právě jedním z našich cílů v tomto kurzu bylo ujednotit, zopakovat a připomenout znalosti a dovednosti, které by měli žáci mít a ovládat z předchozí výuky.

Z hlediska prvního primárního cíle bylo zjištěno, že pět žáků nezvládlo vyčíslování funkčních hodnot dané funkce na kalkulačce. V prvním případě žák nedokázal vyplnit tabulku vůbec. Ve druhém případě chybující žák udělal méně závažnou chybu. Správně spočítal funkční hodnotu  $y=2,4$  pro  $x=-1,5$ , ale pro bod osově symetrický podle osy  $y$  mu vyšla funkční hodnota  $y=2,1$ . Ve zbylých třech případech, kdy žáci chybovali, se již jednalo o stejnou velmi závažnou chybu, kdy pro hodnotu  $x=0$  doplnili místo  $y=1$  ve všech třech případech, že  $y=0$ . Při zpětné analýze této chyby bylo zjištěno, že žáci se hodnotu nesnažili vyčíslit a přímo napsali chybný výsledek. Při následném vytváření grafu i přes špatně vyplněnou funkční hodnotu v tabulce jeden ze tří chybujících žáků sestrojil správný graf, což je pak ovšem jeho další chyba. Ostatní dva chybující žáky při tvorbě grafu procházejícího počátkem souřadnic neodradil ani fakt, že vzniklý „zobáček“ (Obr. 6.1), který v grafu vznikl, byl

naprosto nepřírozený. Dokonce se zdá, že několik žáků se domnívá, že graf každé funkce prochází počátkem systému souřadnic.



Obr. 6.1: Chybný graf funkce  $y = \cosh x$  procházející počátkem souřadnic

Z hlediska navazujícího druhotného cíle ohledně zaokrouhlování bylo zjištěno, že většina žáků měla problém s pojmem zaokrouhlit na jedno desetinné místo. Všichni žáci, až na jednoho, nedokázali výpis z funkce vyplnit bez chyby. Nejčastější chybou celkem u 18 z 19 žáků bylo, že funkční hodnotu pro  $x=0$  doplnili hodnotou, která byla zaokrouhlena na jednotky, tj.  $y=1$ , nikoli  $y=1,0$  (viz Obr. 6.2).

x	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
y	16,6	6,1	2,4	1,1	1,0	1,1	2,4	6,1	16,6	45,0

Obr. 6.2: Zaokrouhlování

Zajímavé je, že pouze 5 žáků udělalo stejnou chybu pro  $x=4,5$  (Obr. 6.3), což souviselo zřejmě s tím, že funkční hodnotu pro  $x=0$  žáci nevyčíslili na kalkulačce, protože si ji pamatovali, kdežto pro  $x=4,5$  kalkulačku použili. Navíc jeden z žáků zaokrouhlil všechny funkční hodnoty na dvě desetinná místa, kromě situace pro  $x=0$ , kde doplnil  $y=1$ . Jiný žák pak hodnotu 2,35 zaokrouhlil na 2,3.

x	-3,5	-2,5	-1,5	-0,5	0	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
y	16,6	6,1	2,4	1,1	1,0	1,1	2,4	6,1	16,6	45,0

Obr. 6.3: Zaokrouhlování

Z hlediska zbylých prvotních cílů lze shrnout, že většina žáků zvolila vhodné měřítko grafu, vyznačila funkční body a propojila příslušné body plynulou křivkou. V jednom případě však žák při vytváření křivky funkce propojil body lomenou čarou.

Poznámka: Je třeba podotknout, že žáci byli v předchozí hodině seznámeni s obsahem budoucí prověrky, která navazovala na aktivitu z minulé hodiny. Vzhledem k tomuto faktu a k tomu, že jsme ji nepovažovali za obtížnou, mohl být celkový výsledek výrazně lepší.

## 6.2 Druhá prověrka

✓ Zadání:

Sestrojení grafů tří logicky souvisejících hyperbolických funkcí.

Do společného obrázku sestrojte 3 grafy funkcí, určete definiční obory a obory hodnot:

$$\begin{array}{lll} f : y = -\sinh x & \mathcal{D} = & \mathcal{H} = \\ g : y = -\sinh(x-2) & \mathcal{D} = & \mathcal{H} = \\ h : y = 4 - \sinh(x-2) & \mathcal{D} = & \mathcal{H} = \end{array}$$

Do společného obrázku sestrojte 3 grafy funkcí, určete definiční obory a obory hodnot:

$$\begin{array}{lll} f : y = \cosh(x-2) & \mathcal{D} = & \mathcal{H} = \\ g : y = -3 + \cosh(x-2) & \mathcal{D} = & \mathcal{H} = \\ h : y = |-3 + \cosh(x-2)| & \mathcal{D} = & \mathcal{H} = \end{array}$$

✓ Komentář:

Na prověrku bylo vyčleněno třináct minut. Prověrky se zúčastnilo všech 19 žáků kurzu.

V této prověrce bylo primárním cílem ověřit, zda žáci rozumějí pojmu definiční obor, obor hodnot funkce, zda ovládají obdobně jako u goniometrických funkcí posouvat graf na základě změny koeficientů v předpisu hyperbolické funkce pomocí šablon hyperbolických funkcí.

Z hlediska prvotních cílů dělalo několika žákům problém správně určit definiční obor, případně obor proměnné.

Druhotným cílem bylo ověřit, zda žáci rozumějí pojmu absolutní hodnota funkce.

Z hlediska druhotných cílů nebyly zjištěny na základě jedné z úloh výraznější problémy žáků.

Poznámka: Obecně lze shrnout, že tato prověrka z hlediska klasifikace dopadla nejlépe ze všech čtyř prověrek, ač byla z pohledu autora diplomové práce obtížnější než prověrka první. To naznačuje pozitivní vliv výuky na pokrok žáků.

### 6.3 Třetí prověrka

#### ✓ Zadání

Do společného obrázku sestrojte užitím šablony grafy čtyř funkcí; určete jejich definiční obory a obory hodnot.

$$f : y = \operatorname{argsinh} x \qquad g : y = \operatorname{argsinh} |x|$$

$$h : y = -3 + \operatorname{argsinh} |x| \qquad k : y = |-3 + \operatorname{argsinh} |x||$$

Do společného obrázku sestrojte užitím šablony grafy čtyř funkcí; určete jejich definiční obory a obory hodnot.

$$f : y = \operatorname{argcosh} x \qquad g : y = \operatorname{argcosh} (x - 3)$$

$$h : y = -1 + \operatorname{argcosh} (x - 3) \qquad k : y = |-1 + \operatorname{argcosh} (x - 3)|$$

#### ✓ Komentář:

Na prověrku bylo vyčleněno dvacet minut. Prověrky se zúčastnilo 17 z 19 žáků kurzu.

Prověrka obsahovala 2 gradované úlohy na sestrojení grafů hyperbolometrických funkcí, které bylo možné sestrojit pomocí šablon sinu a kosinu hyperbolického.

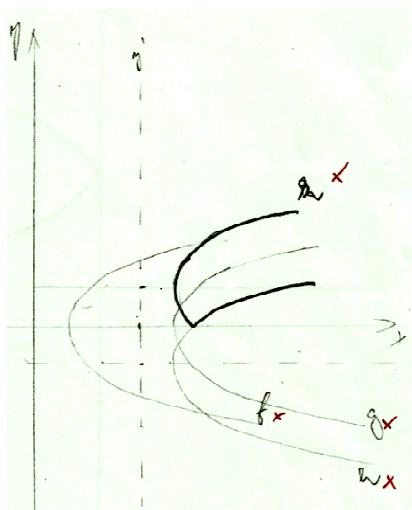
Prvotním cílem bylo ověřit, zda žáci rozumějí pojmům absolutní hodnota argumentu funkce a dokážou správně určit definiční obor a obor hodnot funkce.



Druhotným cílem bylo ověřit, zda žáci rozumějí pojmu funkce, inverzní relace a inverzní funkce.

Při analýze prověrek, kde chybovalo celkem pět žáků, bylo zjištěno, že pouze jeden žák chyboval v souvislosti s absolutní hodnotou. Zbylé chyby spočívaly ve špatně posunuté funkci, dále v jednom případě žák nezobrazoval argument sinu hyperbolického jako osově souměrnou křivku podle osy 1. a 3. kvadrantu, ale narýsoval místo argumentu hyperbolického sinu hyperbolický sinus.

Z hlediska druhotných cílů bylo zjištěno, že dva žáci narýsovali inverzní relaci ke kosinu hyperbolickému místo inverzní funkce k funkci kosinus hyperbolický, viz Obr. 6.4.



Obr. 6.4: Žák sestavuje inverzní relace, nikoli funkce

Přestože se jednalo o žáky podprůměrné z dané skupiny žáků, měli by rozhodně znát, že jimi narýsovaná křivka není inverzní funkcí, ale pouze relací, a to i vzhledem k tomu, že v zadání bylo jednoznačně zadáno: sestrojte grafy čtyř funkcí.

## 6.4 Čtvrtá prověrka

### ✓ Zadání

Grafické přibližné řešení dvou rovnic a nerovnic s jednou hyperbolickou či hyperbolometrickou funkcí.

1) Řešte graficky rovnici  $|\sinh x| = 3 + \operatorname{argsinh} x$  v oboru proměnné  $\mathcal{O} = \mathcal{R}$ .

a) Ve společném obrázku zobrazte grafy pravé a levé strany.

b) Na ose  $x$  vyznačte obor kořenů.

c) Zapište definiční obor rovnice a obor kořenů. Kořeny zapište s přesností na desítiny.

Poznámka: Kořeny ovšem určíte pouze přibližně.

2) Řešte graficky nerovnici  $|\sinh x| \leq 3 + \operatorname{argsinh} x$  v oboru proměnné  $\mathcal{O} = \mathcal{R}$ .

a) Ve společném obrázku zobrazte grafy pravé a levé strany.

b) Na ose  $x$  vyznačte obor kořenů.

c) Zapište definiční obor rovnice a obor kořenů. Meze zapište s přesností na desítiny.

Poznámka: Meze ovšem určíte pouze přibližně.

3) Řešte graficky rovnici  $2 + \operatorname{arctg}|x| = \cosh x$  v oboru proměnné  $\mathcal{O} = \mathcal{R}$ .

a) Ve společném obrázku zobrazte grafy pravé a levé strany.

b) Na ose  $x$  vyznačte obor kořenů.

c) Zapište definiční obor rovnice a obor kořenů. Kořeny zapište s přesností na desítiny.

Poznámka: Kořeny ovšem určíte pouze přibližně.

4) Řešte graficky nerovnici  $2 + \operatorname{arctg}|x| > \cosh x$  v oboru proměnné  $\mathcal{O} = \mathcal{R}$ .

a) Ve společném obrázku zobrazte grafy pravé a levé strany.

b) Na ose  $x$  vyznačte obor kořenů.

c) Zapište definiční obor rovnice a obor kořenů. Meze zapište s přesností na desítiny.

Poznámka: Meze ovšem určíte pouze přibližně.

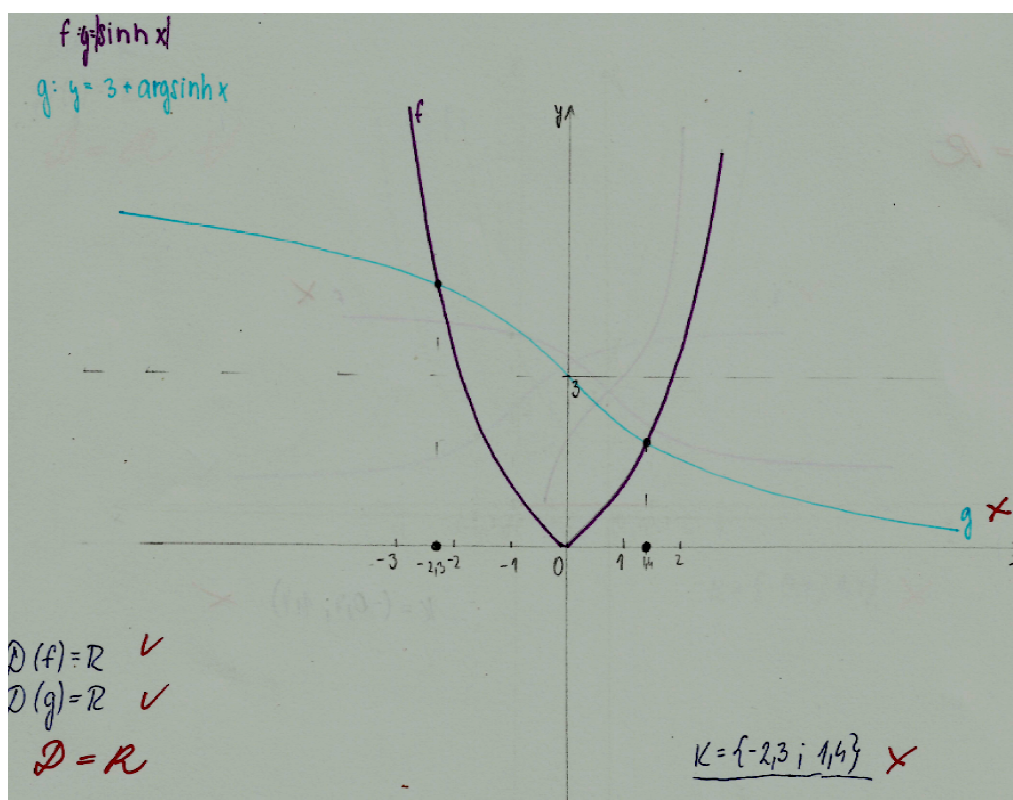
#### ✓ Komentář

Na prověrku bylo vyčleněno dvacet minut. Prověrky se zúčastnilo 18 z 19 žáků kurzu.

Prověrka obsahovala celkem čtyři úlohy, a to dvě rovnice a dvě nerovnice. Rovnice a nerovnice byly zvoleny tak, aby rovnice a nerovnice obsahovaly kombinace jak

hyperbolometrických a hyperbolických funkcí, ale aby obsahovaly také souvislost s goniometrickými a dalšími funkcemi.

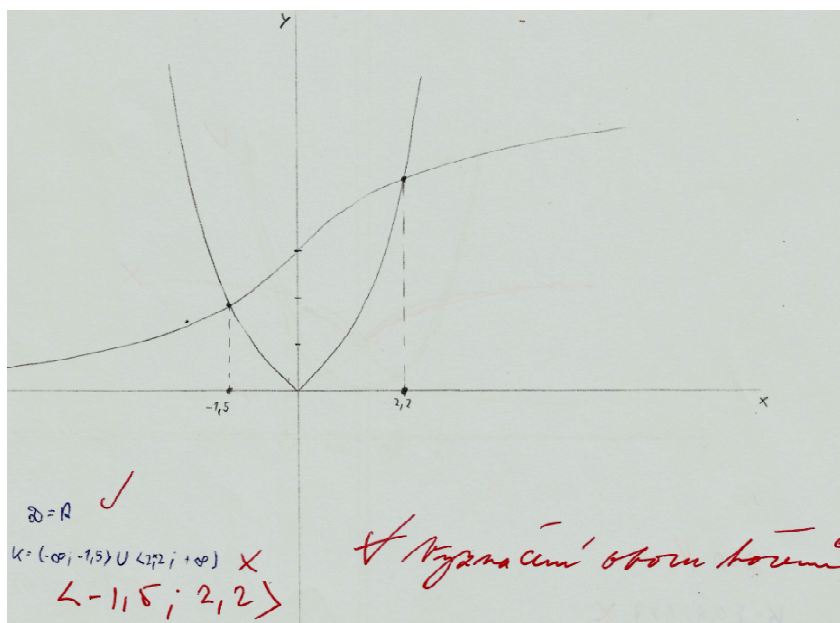
V první úloze, kde byla zadána rovnice  $|\sinh x| = 3 + \operatorname{argsinh} x$ , žáci chybovali zcela ojediněle. Chyba, která se objevila, byla neuvedení definičního oboru rovnice. Žáci určili zvlášť definiční obor pravé a pak levé strany rovnice a definiční obor celé rovnice již nezapsali. Celkem takto chybovalo 6 žáků. Jeden z těchto žáků navíc v 1. úloze špatně narysoval funkci  $y = 3 + \operatorname{argsinh} x$  a následné řešení bylo důsledkem toho chybné (Obr. 6.5).



Obr. 6.5: Chybné řešení

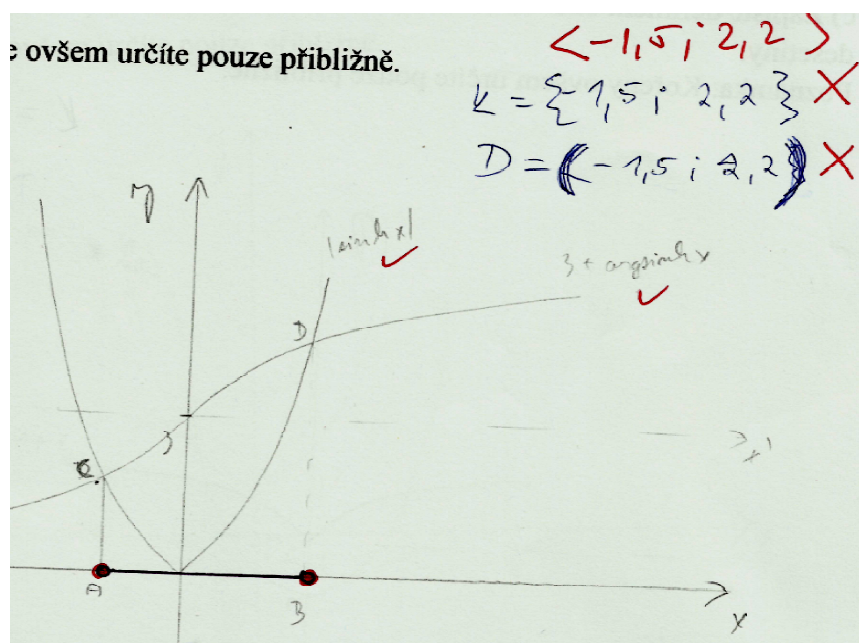
Druhou úlohu, kde byla zadána nerovnice  $|\sinh x| \leq 3 + \operatorname{argsinh} x$ , správně nevyřešilo 5 žáků. Jeden žák<sup>15</sup> nakreslil pouze osový kříž. Jeden z žáků chybně zapsal obor kořenů (Obr. 6.6).

<sup>15</sup> Budeme se o něm zmiňovat ještě v souvislosti s nefungující kalkulačkou.



Obr. 6.6: Chybné řešení

Další žák chyboval v tom, že obor kořenů neurčoval pro zadanou nerovnici, ale pro rovnici (Obr. 6.7).

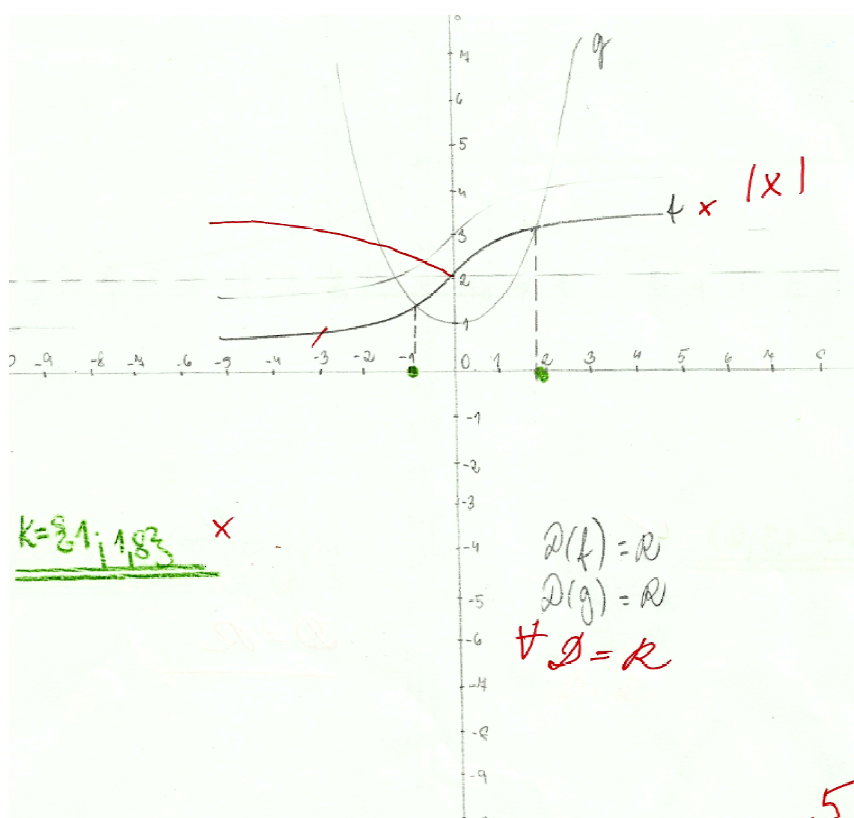


Obr. 6.7: Chybné určení oboru kořenů nerovnice jako by se jednalo o rovnici

Ještě za podstatnější chybu považujeme, že tento žák nerozumí pojmu definiční obor nerovnice.

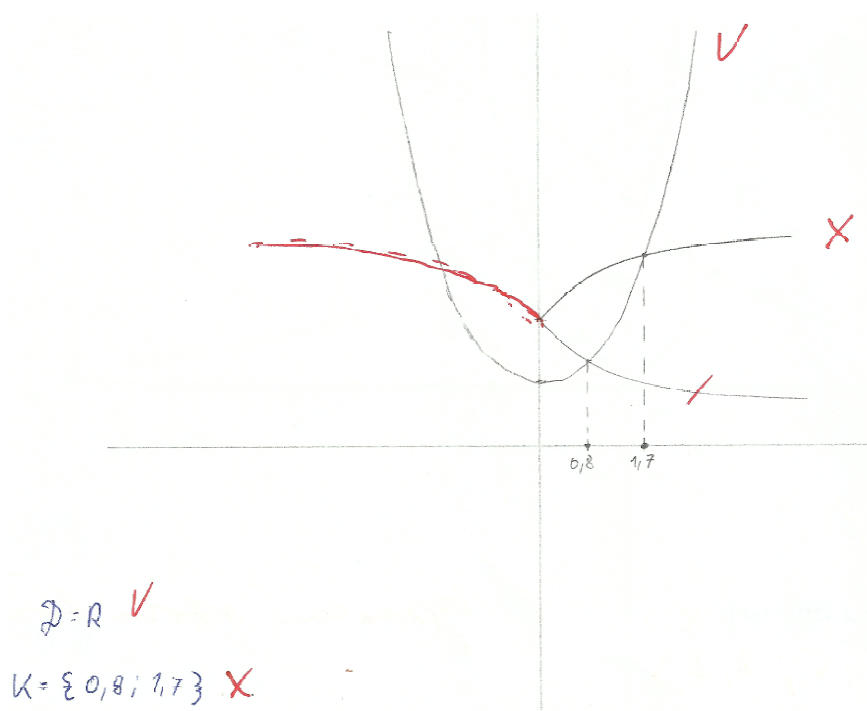
Poslední chybující žák udělal analogickou chybu jako v úloze 1, a podstata chyby vyplývá z Obr. 6.5, kdy nedokázal narysovat funkci  $y = 3 + \operatorname{argsinh} x$ . Mohlo by se zdát, že bylo didaktiky neprozíravé dát do druhé úlohy zadání, které odpovídalo první úloze a lišilo se pouze znaménkem nerovnosti, protože v takovém případě je vysoká pravděpodobnost, že žák bude chybovat v případě chybného řešení v první úloze i v druhé. Tímto krokem jsme si chtěli ověřit, že většina žáků rozumí rozdílu mezi rovnicí a nerovnicí v souvislosti s grafickým řešením rovnic a nerovnic. Dalším důvodem k tomuto kroku bylo časové hledisko.

Ve třetí úloze byla zadána rovnice ve tvaru  $2 + \operatorname{arctg}|x| = \cosh x$ . V úloze chybovalo celkem 7 žáků. Celkem čtyři žáci si nedokázali poradit s argumentem v absolutní hodnotě u funkce arkustangens. Ve třech případech absolutní hodnotu argumentu funkce ignorovali (Obr. 6.8).



Obr. 6.8: Chybné řešení absolutní hodnoty argumentu funkce

V posledním případě se žák snažil pracovat s absolutní hodnotou argumentu, ovšem chybně. Za zmínku stojí, že žáka neodradil fakt, že levá strana rovnice, kterou zakreslil do grafu, nebyla funkcí (Obr. 6.9). Tato chyba se již v poslední závěrečné práci neobjevila.

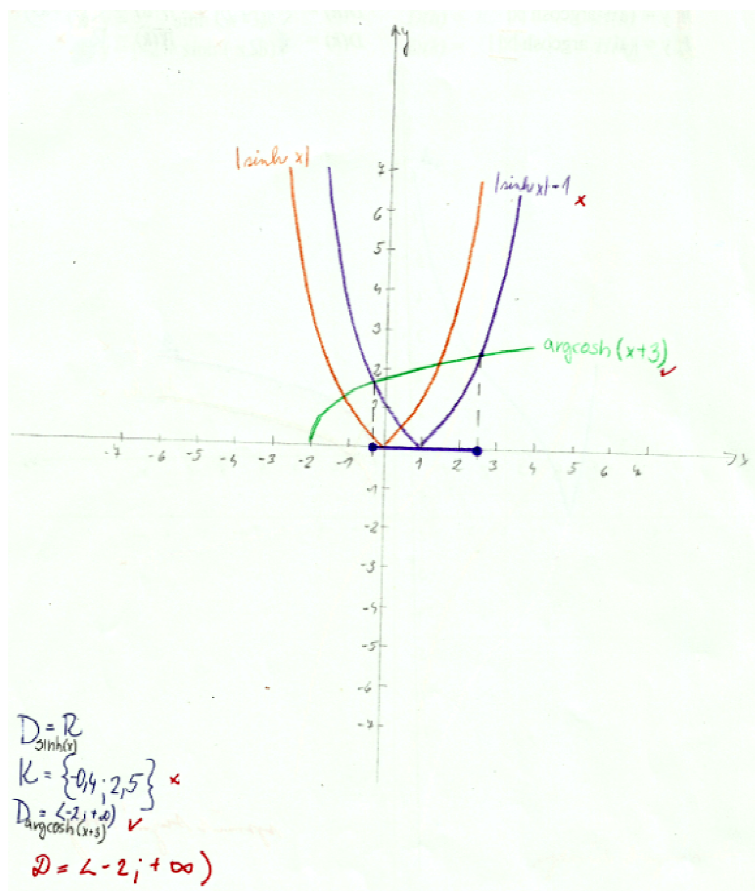


Obr. 6.9: Chybné řešení absolutní hodnoty argumentu funkce

Ve čtvrté úloze námi zadaná nerovnice vycházela z rovnice 3. úlohy ve tvaru  $2 + \operatorname{arctg}|x| > \cosh x$ . Žáci, kteří chybovali ve třetí úloze v souvislosti s absolutní hodnotou argumentu funkce, chybovali obdobně také v této úloze. Jeden žák v této úloze raději nevyplnil definiční obor a obor kořenů nerovnice. Vzhledem k tomu, že nevyřešil ani úlohu č. 2, ve které byla zadána také nerovnice, ale úlohy č. 1 a č. 3 žák vyřešil správně, konstatujeme na základě analýzy prověrek ostatních žáků, že pouze dva žáci neprokázali znalost a porozumění pojmu nerovnice probíraném v základním kurzu matematiky. Toto zjištění jsme se variací úloh snažili prověřit. Je třeba upozornit, že v závěrečné písemné práci již žák, o kterém hovoříme, prokázal pochopení pojmu nerovnice při řešení nerovnice  $|\sinh x| - 1 \leq \operatorname{argcosh}(x + 3)$  viz Obr.



6.10, bohužel celé řešení úlohy bylo nesprávné kvůli chybně posunuté funkci  $y = |\sinh x| - 1$ .



Obr. 6.10 Chybně posunutá funkce  $y = |\sinh x| - 1$ .

## 6.5 Závěrečná písemná práce

### ✓ Zadání

Po jedné úloze podobných úlohám z malých prověrek.

Metodou výpisu sestrojte graf funkce argument hyperbolické tangenty ( $\mathcal{O} = \mathcal{R}$ ).

Napište rovnici funkce:  $f : y =$

Vyplňte tabulku s přesností na 1 desetinné místo:

$x$	-0,9	-0,7	-0,5	-0,3	-0,1	0	0,1	0,3	0,7	0,9
$y$										

Měřítka obou os zvolte tak, abyste využili šířky a výšky papíru. Má-li graf asymptoty, sestrojte je. Zapište obory:  $\mathcal{D} =$   $\mathcal{H} =$

2) Do společného obrázku sestrojte grafy funkcí ( $\mathcal{O} = \mathcal{R}$ ), zapište obory.

$$f : y = \sinh x \quad \mathcal{D}(f) = \quad \mathcal{H}(f) =$$

$$g : y = \sinh(x - 3) \quad \mathcal{D}(g) = \quad \mathcal{H}(g) =$$

$$h : y = -2 + \sinh(x - 3) \quad \mathcal{D}(h) = \quad \mathcal{H}(h) =$$

$$k : y = |-2 + \sinh(x - 3)| \quad \mathcal{D}(k) = \quad \mathcal{H}(k) =$$

3) Do společného obrázku sestrojte grafy funkcí ( $\mathcal{O} = \mathcal{R}$ ), zapište obory.

$$f : y = \operatorname{argcosh} x \quad \mathcal{D}(f) = \quad \mathcal{H}(f) =$$

$$g : y = \operatorname{argcosh}|x| \quad \mathcal{D}(g) = \quad \mathcal{H}(g) =$$

$$h : y = -1 + \operatorname{argcosh}|x| \quad \mathcal{D}(h) = \quad \mathcal{H}(h) =$$

$$k : y = |-1 + \operatorname{argcosh}|x|| \quad \mathcal{D}(k) = \quad \mathcal{H}(k) =$$

4) Graficky řešte nerovnici  $|\sinh x| - 1 < \operatorname{argcosh}(x + 3)$  ( $\mathcal{O} = \mathcal{R}$ ); na ose  $x$  vyznačte obor kořenů. Zapište definiční obor a obor kořenů nerovnice. Meze zapište s přesností na desetiny.

#### ✓ Komentář

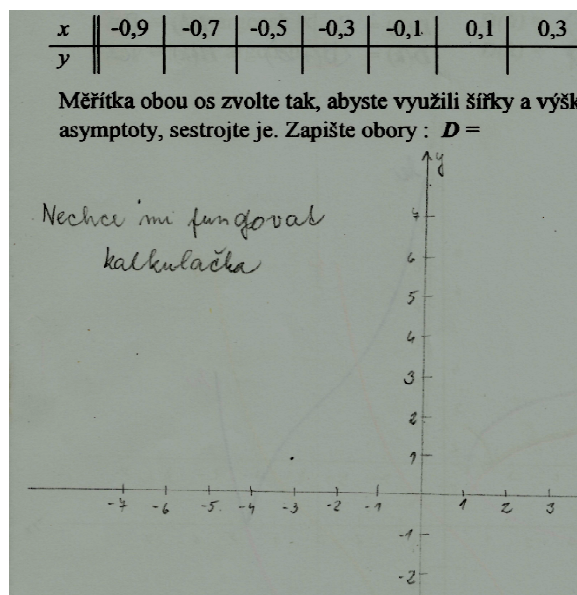
Na prověrku bylo vyčleněno čtyřicet minut. Prověrky se zúčastnilo všech 19 žáků kurzu.

V první úloze bylo cílem ověřit, zda žáci pomocí výpisu funkce dokážou narýsovat graf argumentu hyperbolické tangenty. Funkční předpis ve tvaru přirozeného logaritmu žáci nemuseli odvozovat, ale mohli si ho vyhledat v tabulce hyperbolických funkcí a k nim inverzních funkcí, kterou si sami měli za domácí úkol vytvořit.

První úlohu nedokázalo vyřešit šest žáků. Ve třech případech se žáci dopustili stejné chyby, která spočívala v tom, že místo funkce argumentu hyperbolické tangenty



úlohu řešili pro hyperbolickou tangentu. Chyba tedy pravděpodobně spočívala v tom, že si dobře nepřečetli zadání nebo si neuvědomili rozdíl mezi hyperbolickou a hyperbolometrickou funkcí. Dva žáci určili špatně definiční obor, a to v obou případech jako uzavřený interval  $\langle -1;1 \rangle$ .



Obr. 6.11: Nechce mi fungovat kalkulačka

Jeden z žáků měl zjevně technický problém, protože napsal, že mu nechce fungovat kalkulačka. Stojí za zmínku, že žák sice nevyplnil výpis funkce, ale přesto se zabýval tím, že si narýsoval osy grafu a pečlivě osy popsal zřejmě s plným vědomím, že do grafu nebude mít co zakreslit, viz Obr. 6.11.<sup>16</sup> Poznamenejme ještě, že v celém tematickém celku jsme jako vyučující byli připraveni při poruše zapůjčit žákům 3 náhradní kalkulačky.

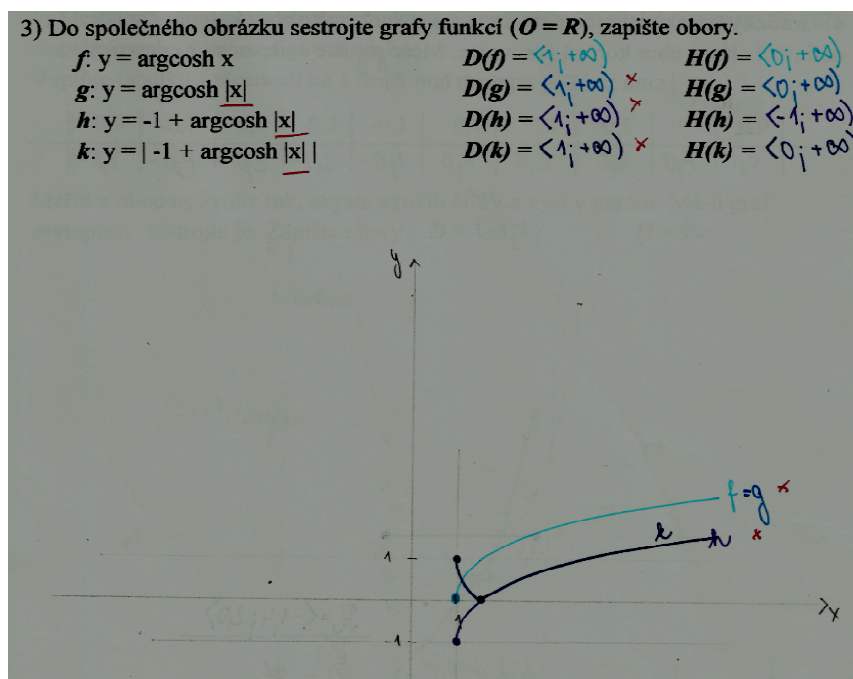
Druhá úloha byla již zaměřená na využití šablon hyperbolických funkcí. Cílem bylo ověřit zvládnutí posouvání grafů na základě změny koeficientů ve funkčním předpisu zadané funkce analogicky, jako je tomu například u goniometrických funkcí. Ověřit, že žáci rozumějí pojmu absolutní hodnota a za pomoci vhodného převrácení šablony zadané hyperbolické funkce zadanou absolutní hodnotu graficky vyjádřit.

<sup>16</sup> I takoví jsou někteří žáci.

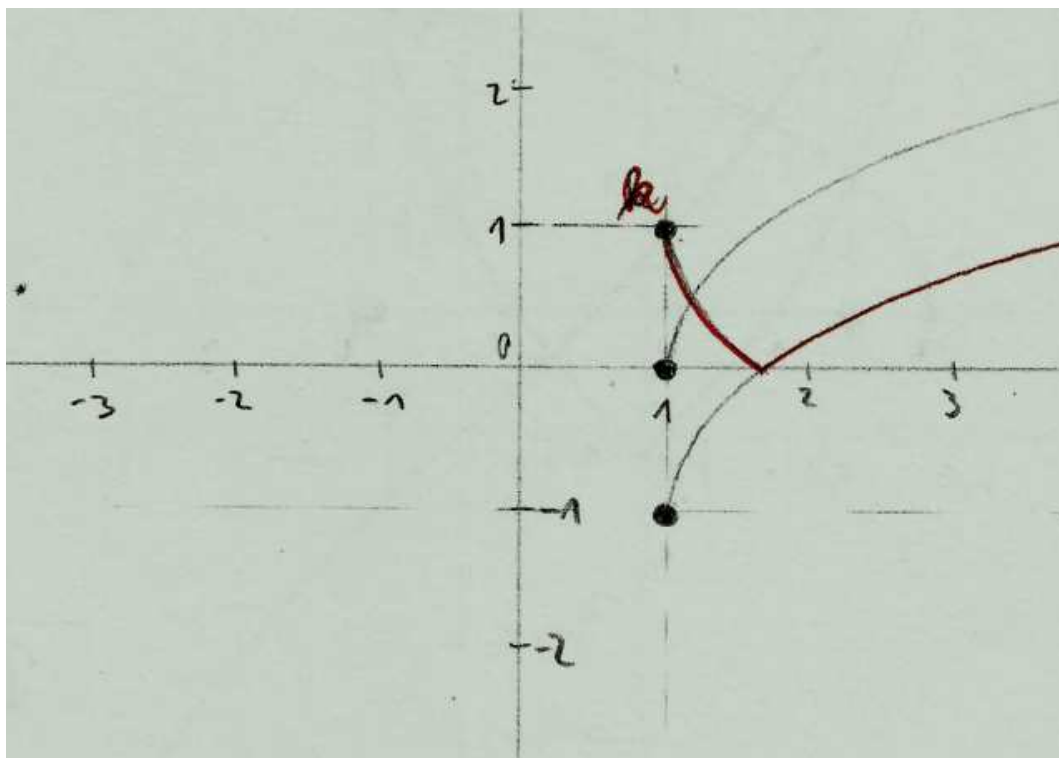
Druhou úlohu nedokázal správně vyřešit pouze jeden žák. Chyba spočívala v tom, že místo funkce  $y = \sinh(x-3)$  žák sestrojil funkci  $y = \sinh(x+3)$  a v následných úlohách pracoval s touto chybou.

Ve třetí úloze bylo prvotním cílem ověřit, zda žáci dokážou naryšovat pomocí šablon hyperbolických funkcí hyperbolometrickou funkci pomocí osové souměrnosti podle osy 1. a 3. kvadrantu, která je skutečně funkcí, nikoli inverzní relací k funkci hyperbolické, tedy zda rozumí pojmu funkce a rozdílu mezi pojmy inverzní funkce a inverzní relace.

Ve třetí úloze chybovalo celkem 5 žáků, protože nereflektovali absolutní hodnotu argumentu zadané hyperbolometrické funkce (Obr. 6.12a, Obr. 6.12b). Zajímavé je zjištění, že v této úloze v souvislosti a absolutní hodnotou argumentu funkce chybovalo více žáků než v podobné úloze č. 3 ze čtvrté prověrky. Při analýze tohoto jevu jsme dospěli k názoru, že k větší chybovosti žáků vedl fakt, že v závěrečné písemné práci byla tato úloha gradovaná a první zadaná funkce neobsahovala argument s absolutní hodnotou.



Obr. 6.12a: Chybné grafické řešení

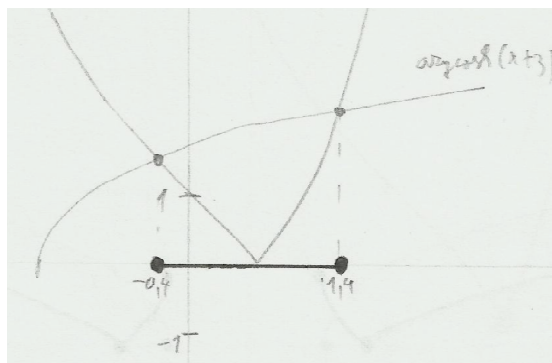


Obr. 6.12b: Chybné grafické řešení

Častá chyba byla také v tom, že občas žák zapomněl do grafu vyznačit krajní body funkce. Jeden žák chyboval v určení definičního oboru v souvislosti s absolutní hodnotou. Určil interval definičního oboru jako  $\langle 1; +\infty \rangle$  místo  $\langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$ , přestože graf měl sestrojen správně.

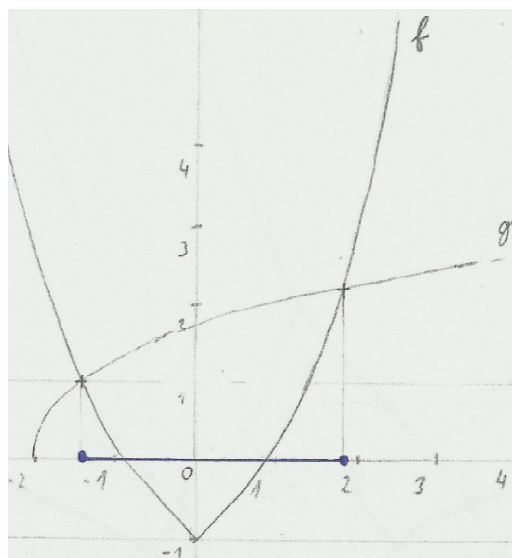
Čtvrtá úloha byla zaměřena na grafické řešení rovnic a nerovnic. Cílem úlohy bylo ověřit, že žáci dokážou graficky řešit rovnice a nerovnice. Rozumějí pojmu obor kořenů rovnice a nerovnice a dokážou obor kořenů vyjádřit graficky do grafu a provést přibližný číselný odhad oboru kořenů.

Poslední čtvrtá úloha měla nejnižší úspěšnost v celé písemné práci. Chybovalo v ní celkem 14 žáků. Sedm žáků chybovalo v sestrojení funkce  $y = |\sinh x| - 1$ . Graf funkce  $y = \sinh x$  nejprve posunuli doprava a pak sestrojili sice absolutní hodnotu, avšak funkce  $y = |\sinh x - 1|$  místo zadané funkce  $y = |\sinh x| - 1$  viz Obr. 6.13.



Obr. 6.13: Chybné grafické řešení nerovnice

Správné grafické řešení je na Obr. 6.14, kde žák nejprve zkonstruoval graf absolutní hodnoty sinu hyperbolického a následně graf posunul.



Obr. 6.14: Správné grafické řešení nerovnice

Tři žáci chybovali v sestavení funkce  $y = \operatorname{argcosh}(x+3)$  tím, že si funkci  $y = \operatorname{argcosh} x$  chybně posunuli. Všech 14 žáků, kteří neměli bezchybné řešení čtvrté úlohy, udělalo chybu v definičním oboru nebo v oboru kořenů nerovnice. Častou chybou bylo také nevyznačení oborů kořenů do grafu nebo nevyplnění či nesprávné vyplnění definičního oboru nerovnice.

## 6.6 Zjištění

Nejčastější chyby, které se opakovaly v průběhu testování, byly spojeny s absolutními hodnotami a především s absolutní hodnotou argumentu funkce.

V případě argumentu funkce v absolutní hodnotě žáci často absolutní hodnotu úplně ignorovali.

Dále bylo zjištěno, že žáci mají výraznější problém s pochopením pojmu a významu definičního oboru rovnice nebo nerovnice. Jsou zvyklí určit definiční obor levé a pravé strany rovnice respektive příslušné funkce, ale neprovedou průnik těchto správně určených definičních oborů.

Někteří žáci také nahrazovali zápis intervalu v souvislosti s oborem kořenů zápisem jiného významu (Obr. 6.15, Obr. 6.16). K Obr. 6.16 podotýkáme, že žák měl grafické vyjádření vyznačené v grafu správně.

$$K = \cancel{<-1,4; 2,3>}$$

Obr. 6.15: Špatný zápis intervalu oboru kořenů

$$D = R_{\sinh(x)}$$

$$K = \{-0,4; 2,5\} \quad \times$$

$$D_{\argcosh(x+5)} \quad \checkmark$$

Obr. 6.16: Jiný špatný zápis intervalu oboru kořenů

Dalším zjištěním byl problém se zaokrouhlováním, který jsme reedukovali. Bohužel jsme nevyužili příležitosti ověřit si úspěšnost reedukace prostřednictvím závěrečné písemné práce, kde jsme do tabulky výpisu funkce nezařadili hodnotu  $x = 0$ , která by byla vhodná k ověření úspěšnosti reedukace. Vědomi si tohoto omylu, upravili jsme následně zadání závěrečné písemné práce v oddílu 6.5.

## 6.7 Zhodnocení evaluace

Chyby v kontrolovaných výstupech se týkaly zejména obecných vlastností funkcí a jejich inverzí, zápisů a také výrazů, jejichž zopakování bylo jedním z cílů probírání daného tématu. Je zřejmé, že si žáci zopakovat a upevnit dané pojmy potřebovali.

Vzhledem k tomu, že při vytváření prověrek se nezdála být jejich obtížnost vysoká, bylo předpokládáno, že výsledky písemek budou o něco lepší. Je třeba zdůraznit, že

chyby, které žáci převážně dělali, nevycházely z neznalosti látky hyperbolických funkcí, ale žáci měli problémy s látkou, kterou si v našem kurzu měli již jen procvičit a ujednotit. Ostatně tento kurz nebyl koncipován tak, aby se v něm žáci primárně učili novou látku, ale aby si na méně standardním tématu procvičili dovednosti, které mají ovládat ze základního kurzu matematiky. Je potřeba brát také v úvahu, že velký důraz byl v prověrkách kladen na inverzní funkce. Většina chyb, které byly zaznamenány, však s inverzními funkcemi nesouvisela.

Vzhledem k většímu množství čtyř žáků, kteří dosáhli ze závěrečné písemné práce čtyřku, jsme se rozhodli detailněji podívat na to, co bylo příčinou jejich neúspěchu. Bylo zjištěno, že žáci, kteří nebyli úspěšní, se dopustili chyb, které nebyly většinou systematické.

Ilustrujme si danou situaci na příkladu jednoho konkrétního žáka. Tento žák v prověrce č. 4 zvládnul analogickou úlohu s úlohou v závěrečné písemné práci, se kterou si ovšem neporadil. Chyba spočívala v tom, že žák při grafickém vyjádření jedné strany rovnice si funkci špatně posunul v grafu, ač tuto chybu v předchozích písemkách neudělal. Ve třetí úloze písemné práce tentýž žák evidentně přehlédl absolutní hodnotu u argumentu funkce, protože opět podobnou úlohu jako v předchozím případě v prověrce č. 4 zvládl bez problémů. Rozdíl byl však v tom, že závěrečná prověrka obsahovala v každém příkladu gradovanou sérii úloh a žák patrně přehlédl, že první úloha ze série funkcí s absolutní hodnotu argumentu neobsahuje a další již ano. Druhou úlohu tento žák vyřešil správně s drobnou nepřesností, kdy graficky nevyznačil krajní bod grafu funkce  $k$ . Tento konkrétní žák pak úlohu č. 1 neřešil vůbec, údajně z technických důvodů.<sup>17</sup> Je podstatné dodat, že nejčastějším typem obtíží v první úloze bylo, že z hlediska celkových výsledků si neúspěšní žáci špatně přečetli zadání. V tomto případě pracovali s hyperbolickou tangentou místo argumentu hyperbolické tangenty. Lze tedy konstatovat, že velkou roli v neúspěchu některých žáků hrála nepozornost, možná i zbrkllost, která v případě, že

<sup>17</sup> Nefungující kalkulačka

se projevila, při úvodních krocích řešení daných úloh způsobila, že celá úloha byla hodnocena stupněm dostatečně nebo nedostatečně. Je třeba zdůraznit, že dovednost jako posouvání funkcí v grafu na základě zadaných koeficientů už by žáci měli mít dostatečně zautomatizovanou a byla tudíž při nesplnění logicky považována za velmi hrubou chybu, na rozdíl například od práce s absolutní hodnotou, která navíc klade vyšší myšlenkové nároky na žáka.

Skupina, kterou jsme vyučovali, byla složena z žáků tří tříd, jedna třída patřila do osmiletého, dvě třídy do čtyřletého studia. Každou třídu vyučoval na kmenovou matematiku jiný učitel, což nám práci nijak neusnadnilo.

## 7 Další možnosti pokračování kurzu

### 7.1 Infinitesimální počet hyperbolických a hyperbolometrických funkcí

Základní kurz, jemuž jsou věnovány předchozí kapitoly této práce, byl odučen ve 3. ročníku čtyřletého a 7. ročníku osmiletého studia. Na škole, které se náš pokus týká, se však limity, derivace, primitivní funkce a určité integrály vyučují v předmětu Matematická analýza ve 4. ročníku čtyřletého studia, respektive v 8. ročníku osmiletého studia, tedy o jeden rok později. Bylo by jistě možné pokračovat tam tématem z nadpisu, pokud by k tomu byla příležitost, vůle a čas.

Možné kapitoly takového kurzu:

- a) Vybrané limity hyperbolických a hyperbolometrických funkcí
- b) Formální derivace hyperbolických a hyperbolometrických funkcí
- c) Užití derivací hyperbolických a hyperbolometrických funkcí
- d) Primitivní funkce vybraných hyperbolických a hyperbolometrických funkcí
- e) Určité integrály hyperbolických a hyperbolometrických funkcí
- f) Obsahy rovinných obrazců omezených grafy různých, mj. také hyperbolických a hyperbolometrických funkcí
- g) Objemy a povrchy rotačních těles vzniklých rotací grafů hyperbolických a hyperbolometrických funkcí
- h) Užití hyperbolických a hyperbolometrických funkcí ve fyzice
- i) Podrobné rozpracování takového programu vysoce převyšuje ambice této práce.

Na této škole již před několika léty takový pokus proběhl; materiály tam použité zveřejňujeme v příloze č. 11. Při tomto pokusu vznikla také sada žákovských prací s přehledy vlastností hyperbolických a hyperbolometrických funkcí pro zveřejnění na internetu. Ta je obsažena v příloze č. 12.



Zde se omezíme jen na několik úloh, aby učitel měl určitou rámcovou představu o obsahu kurzu.

1) Odvoďte vztah pro derivaci funkce  $y = \cosh x$ , použijte exponenciálního vyjádření hyperbolické funkce.

Řešení: Hyperbolickou funkci přepíšeme do jazyka funkcí exponenciálních, tam zderivujeme a přepíšeme zpět.

$$(\cosh x)' = \left( (e^x + e^{-x}) / 2 \right)' = \left( (e^x - e^{-x}) / 2 \right) = \sinh x$$

2) Formálně zderivujte:

a)  $y = x \sinh x$  derivujeme podle pravidla součinu.

Řešení:

$$(x \sinh x)' = 1 \sinh x + x \cosh x = \sinh x + x \cosh x$$

b)  $y = \frac{x^2}{\operatorname{argtgh} x}$  derivujeme podle pravidla podílu.

Řešení:

$$\text{Jak víme, je } (\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$\text{Proto } (x^2 \operatorname{argsinh} x)' = \left( 2x \operatorname{argsinh} x - \frac{x^2}{1-x^2} \right) (1-x^2)^2 \text{ (výraz můžeme ještě upravit).}$$

c)  $y = \cosh^2(x^2 - 5x + 3)$  derivujeme podle pravidla složené funkce.

Řešení:

$$(\cosh^2(x^2 - 5x + 3))' = 2 \cosh(x^2 - 5x + 3) \sinh(x^2 - 5x + 3) (2x - 5)$$

3) Napište rovnici tečny ortonormálního grafu funkce  $y = \operatorname{argcosh} x$  v bodě

a)  $a = -2$

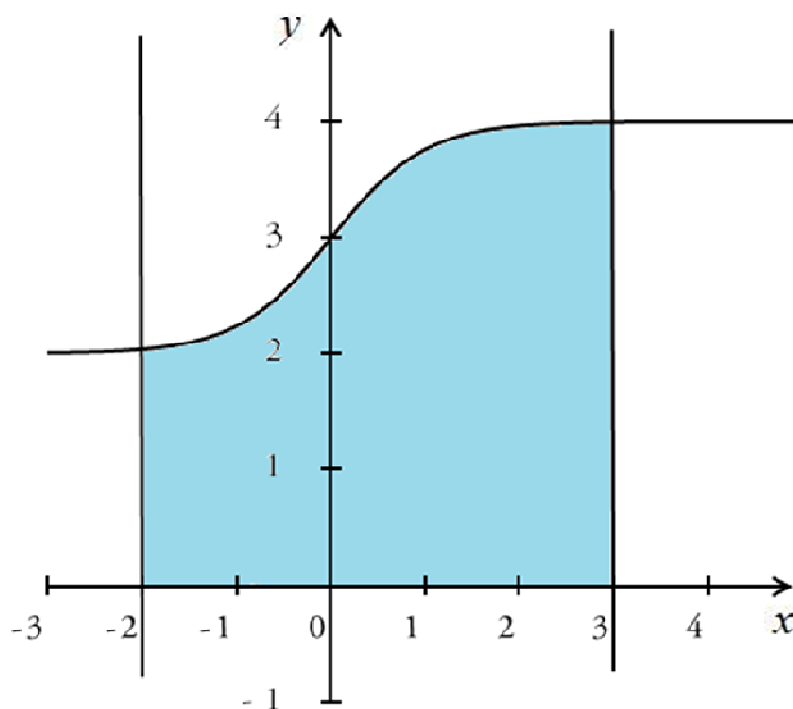
Náznak řešení: Tento bod není v definičním oboru funkce, řešení neexistuje

b)  $a = 3$

Náznak řešení: Tečnu určíme ve směnicovém tvaru  $y = kx + q$ , kde směrnice  $k$  je hodnotou první derivace funkce v bodě  $a$ . Absolutní člen pak určíme z podmínky, že tečna prochází bodem dotyku.

4) Vypočítejte primitivní funkci  $\int x \cdot \sinh x dx$  metodou per partés.

5) Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného křivkami  $y = 0$ ;  $x = -2$ ;  $x = 3$ ;  $y = 3 + \tanh x$ , viz Obr. 7.1



Obr. 7.1: Obsah rovinného obrazce

Náznak řešení: Jde o to vypočítat určitý integrál  $\int_a^b f(x) dx = \int_2^5 (3 + \tanh x) dx$

6) Vypočítejte objem skleničky vzniklé rotací křivky  $y = 1 + \operatorname{arccotgh} x$  kolem osy  $x$  na intervalu  $\langle 2; 4 \rangle$ .

Náznak řešení: Užijeme vzorce  $v = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_2^4 (1 + \operatorname{arccotgh} x)^2 dx$

## 7.2 Práce se vzorci; vztahy mezi hyperbolometrickými či hyperbolometrickými funkcemi

V základním kurzu středoškolské matematiky bývala značná pozornost věnována goniometrickým vzorcům. Máme na mysli např. součtové vzorce, vzorce pro součet a rozdíl, vzorce pro dvojnásobný argument atd. Poznatky nezůstávaly na úrovni informace, ale bývaly povýšeny na úroveň znalostí, na řadě škol pak na úroveň bezpečné dovednosti.

Okolnosti a změny vedly v posledních letech k určitému potlačení tohoto učiva. Procvičit je na hyperbolických a hyperbolometrických funkcích by nebylo na škodu, pochopitelně jen tehdy, když se k tomu najde dostatečná hodinové dotace.

Nyní předvedeme několik odvození a důkazů. Myšlenka všech je prostá: Matematické zákonitosti zde vyšetřované lze vyjadřovat dvěma "jazyky": Jazykem exponenciálních a logaritmických funkcí či jazykem funkcí hyperbolických a hyperbolometrických. Přeložíme nejprve zápis z jazyka hyperbolických do jazyka exponenciálních funkcí, v něm provedeme výpočet a pak přeložíme zpět.

1) Dokažte, že  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ .

Řešení:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = 1$$

2) Dokažte, že  $\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$ .

Řešení:

$$\tanh^2 x = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - 4}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} = 1 - \left( \frac{2}{e^x + e^{-x}} \right)^2 = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$

3) Dokažte, že  $\operatorname{cotgh}^2 x = 1 + \operatorname{cosech}^2 x$ .

Řešení:

$$\operatorname{cotgh}^2 x = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{e^{2x} - 2 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} + 4}{e^{2x} - 2 + e^{-2x}} = 1 + \left( \frac{2}{e^x - e^{-x}} \right)^2 = 1 + \operatorname{cosech}^2 x$$

5) Dokažte, že  $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$ .

Řešení:

$$\cosh^2 x = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1)$$

6) Dokažte, že  $\frac{2 \operatorname{tgh} x}{1 + \operatorname{tgh}^2 x} = \operatorname{tgh} 2x$

Řešení:

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{tgh} x}{1 + \operatorname{tgh}^2 x} &= \frac{2 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 + \left( \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2} = \frac{2 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{\frac{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}} = \\ &= 2 \left( \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) \left( \frac{(e^x + e^{-x})^2}{e^{2x} + e^{-2x} + 2 + e^{2x} + e^{-2x} - 2} \right) = 2 \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2(e^{2x} + e^{-2x})} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \operatorname{tgh} 2x \end{aligned}$$

7) Dokažte, že  $\frac{1 + \operatorname{cotgh}^2 x}{2 \operatorname{cotgh} x} = \operatorname{cotgh} 2x$

Řešení:

$$\frac{1 + \operatorname{cotgh}^2 x}{2 \operatorname{cotgh} x} = \frac{1 + \left( \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2}{2 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} = \frac{\frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 + e^{2x} + e^{-2x} + 2}{(e^x + e^{-x})^2}}{2 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} = \frac{2(e^{2x} + e^{-2x})}{2(e^{2x} - e^{-2x})} = \operatorname{cotgh} 2x$$

8) Dokažte, že  $\sinh^2 x + \cosh^2 x = \cosh 2x$

Řešení:

$$\begin{aligned}\sinh^2 x + \cosh^2 x &= \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} + \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 + e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} = \\ &= \frac{2(e^{2x} + e^{-2x})}{4} = \cosh 2x\end{aligned}$$

9) Dokažte, že  $\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$

Řešení:

$$\begin{aligned}2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} &= 2 \frac{\left( e^{\frac{x+y}{2}} - e^{\frac{-x+y}{2}} \right) \left( e^{\frac{x-y}{2}} - e^{\frac{-x-y}{2}} \right)}{4} = \frac{1}{2} (e^x - e^{-y} - e^y + e^{-x}) = \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh x - \cosh y\end{aligned}$$

10) Dokažte, že pro  $x \in (-1; 1)$  platí:  $\operatorname{argtgh} x = \operatorname{argsinh} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Řešení: Protože tentokrát pracujeme s hyperbolometrickými výrazy, uskutečníme přepis do jazyka logaritmů, v něm provedeme výpočty a konečně přepíšeme zpět do jazyka hyperbolometrických funkcí.

$$\begin{aligned}\operatorname{argsinh} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} &= \ln \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1} \right) = \ln \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{\frac{x^2 + 1 - x^2}{1-x^2}} \right) = \\ &= \ln \left( \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \ln \sqrt{\frac{(x+1)^2}{1-x^2}} = \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{argtgh} x\end{aligned}$$

### 7.3 Praktické aplikace

Praktickým aplikacím se věnuje především publikace Janpolského (Janpolskij 1960).

Není účelem naší práce předvádět složitější odvození a výpočty praktických aplikací hyperbolických a hyperbolometrických funkcí.

Uvedeme zde zadání několika málo příkladů a úloh, výsledek výpočtů zejména pro ty, kdož budou schopni a ochotni zkusit si výpočet samostatně. Zvláště ale půjde o to, aby středoškoláci měli určitou představu o tom, k čemu se ve fyzice, technice a přírodních vědách tyto funkce používají, a poskytnout jim hotové "vzorečky" pro vyčíslení takových úloh.

### 7.3.1 Rovnice hyperboly vyjádřená hyperbolickými funkcemi

Věnujme se parametrickému vyjádření rovnice hyperboly, využívající vlastností funkcí hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus.

Pro hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus platí vztah:  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ , pro všechna reálná  $t$ .

Připomeňme, že rovnice hyperboly s vodorovnou hlavní osou a středem v počátku

ve středovém tvaru je  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Parametrizaci hyperboly provedeme tak, že

položíme  $\frac{x}{a} = \pm \cosh t$  a  $\frac{y}{b} = \sinh t$ . Přitom pro každé ze znamének v první substi-

tuční rovnici dostaneme, jak plyne z oboru hodnot hyperbolického kosinu, jednu

větev hyperboly. Dosazením do rovnice  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  získáme známý vztah

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ . Rovnice  $x = \pm a \cosh t$  a  $y = b \sinh t$  jsou tedy parametrickým vyjádřením hyperboly.

V obecnějším případě má hyperbola se středem  $S[m;n]$  parametrické vyjádření  $x = m \pm a \cosh t$ ,  $y = n + b \sinh t$ . Zde tedy vidíme příklad užití hyperbolických funkcí v analytické geometrii.

### 7.3.2 Padání tělesa ve vzduchu

Hmotný bod hmotnosti  $m$  padá ve stejnorodém gravitačním poli; jeho počáteční rychlost je nulová.

a) Klasickou středoškolskou verzí úlohy je zanedbání odporu vzduchu, resp. pád ve vakuu na relativně krátké dráze. Pak můžeme tíhovou sílu způsobující pohybovou změnu považovat za konstantní. Rovnice vyjadřující závislost polohy hmotného bodu na čase je  $y = \frac{1}{2}gt^2$ ; jde o volný pád. Každý, kdo někdy viděl seskok výsadkáře nebo podzimní pád listu ze stromu, ví, že to ani velmi přibližně nesouhlasí se skutečností.

b) Při pádu ve vzduchu uvažujme, že odpor vzduchu je úměrný druhé mocnině rychlosti. Najdeme pohybový zákon tohoto hmotného bodu, tedy závislost jeho dráhy na čase.

Výsledná síla způsobující pohybovou změnu hmotného bodu  $R = F - T$ , kde  $F$  je gravitační síla  $F = mg$  a  $T$  je síla odporu prostředí  $T = kv^2$ , kde  $k$  je aerodynamická konstanta. Síla odporu prostředí je tedy kvadratickou funkcí okamžité rychlosti.

Integrálně budeme řešit úlohu (diferenciální rovnici)  $m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$ . Výsledkem

je  $v(t) = \sqrt{\frac{gm}{k}} \tanh \sqrt{\frac{gk}{m}} t$  (Zill, Wright 2010, s. 186).

Příklad: Z letadla skáče výsadkář o hmotnosti 80,0 kg. Vypočítejte aktuální rychlost výsadkáře po 8,00 sekundách volného pádu za předpokladu, že jeho počáteční rychlost byla nulová, aerodynamická konstanta padáku  $k = 0,095 \text{ kg.m}^{-1}$  a tíhové zrychlení uvažujeme  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

Po vyčíslení vzorce  $v(t) = \sqrt{\frac{gm}{k}} \tanh \left( \sqrt{\frac{gk}{m}} t \right)$  získáme:

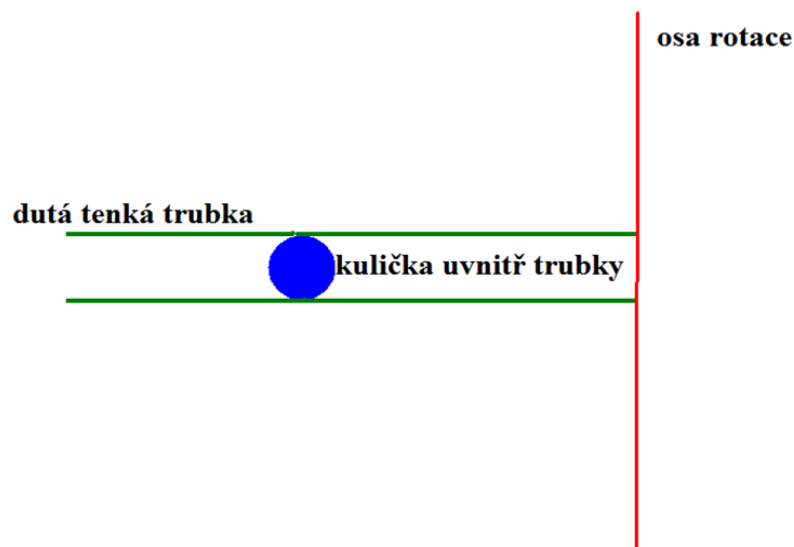
$v(t) = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 80}{0,095}} \tanh \left( \sqrt{\frac{9,81 \cdot 0,095}{80}} \cdot 8 \right)$ , z čehož získáme hledanou rychlost  $v(t) = 63 \text{ m.s}^{-1}$ .

Poznámka: K vyčíslení vztahu můžeme využít například MS Excel nebo Geogebra.

### 7.3.3 Kulička v rotující trubce

Uvnitř vodorovné duté trubky je plná kulička, která se v trubce může pohybovat bez tření. Trubka rotuje kolem svislé osy procházející jedním koncem trubky. Úhlovou rychlost trubky označme  $\omega$ . V počátečním okamžiku  $t = 0$  s je kulička vzdálena od osy o délku  $a$ , rychlost kuličky je rovna nule,

Okamžitou vzdálenost kuličky od osy rotace označíme  $r$ , hmotnost kuličky  $m$ . Najděte pohybový zákon kuličky vzhledem k trubce (Obr. 7.2).



Obr. 7.2: Kulička v trubce

Řešení: Ve vztažné soustavě klidné trubky má stejné pohybové účinky na kuličku síla  $F = m\omega^2 r$ . Diferenciální rovnice vedoucí k řešení úlohy je  $m \frac{d^2 r}{dt^2} = m\omega^2 r$ .

Jejím obecným řešením je vztah  $r = C_1 \cosh(\omega t) + C_2 \sinh(\omega t)$ .

Z počátečních podmínek ( $r = a$ ,  $\frac{dr}{dt} = 0$ ,  $t = 0$ ) najdeme  $C_1 = a$  a  $C_2 = 0$ . Proto závislost vzdálenosti  $r$  na čase je  $r = a \cosh(\omega t)$ . Nyní změníme počáteční podmínky tak, že pro  $t = 0$  s je kulička na ose rotace a má rychlost  $v_0$ , tedy  $r = 0$  m a  $\frac{dr}{dt} = v_0$  při  $t = 0$  s, pak  $C_1 = 0$  a  $C_2 = \frac{v_0}{\omega}$ . Uvedený vztah bude mít tvar



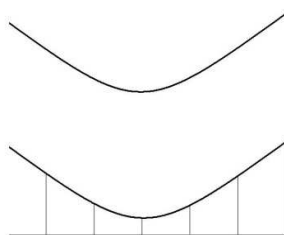
$r = \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t)$  (Janpolskij 1960, s. 148). Závislost vzdálenosti kuličky od osy rotace trubky je tedy hyperbolickou funkcí času.

V práci Janpolského je pak tato úloha řešena v několika dalších variantách (kulička připevněná pružinou k pevnému bodu v trubce, dvě kuličky spojené pružinou atd.).

### 7.3.4 Řetězovka

Kabel, ocelové nebo jutové lano, kovový vodič, řetěz atd. zavěšíme mezi dva pevné body. Účinkem gravitační síly se objekt prohne. Určíme rovnici jeho křivky.

Poznámka: v případě, že nosné lano je zatíženo dalším objektem, rovnice neplatí. Např. nosné lano visutého mostu nemá tvar řetězovky.



Obr. 7.3: Řetězovka a řetězovkové vedení

Troleje tramvají a trolejbusů jsou zavěšeny na podpěrné konstrukci, jednotlivé úseky jsou částí řetězovky (viz horní část Obr. 7.3). Výška lišty pantografu – sběrací tyče se při jízdě neustále mění. Na železnici je při vyšších rychlostech třeba udržovat pantograf v konstantní výšce nad terénem. Proto se na napnuté nosné lano upevní trolej tak, aby byla přesně vodorovná; pak ovšem nosné lano je zatíženo dalším břemenem a nesplňuje tak podmínku řetězovky (viz dolní část Obr. 7.3).

Visící řetěz, kabel, lano se nachází v klidu. Proto síly působící na libovolnou jeho část se nutně navzájem vyruší, jsou v rovnováze. Podrobný fyzikální rozbor situace zdaleka přesahuje účel této práce. Úloha se řeší diferenciální rovnicí

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\omega}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (\text{kde } H \text{ je horizontální napětí a } \omega \text{ vyjadřuje velikost jednot-}$$

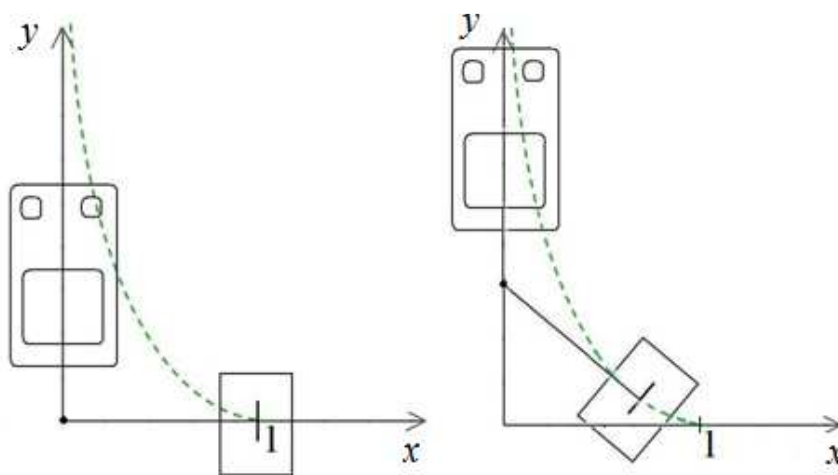
kové délky kabelu) s počátečními podmínkami,  $\frac{dy}{dx}(0) = 0$  a  $y(0) = y_0$ . Tím dosta-

neme  $y = \frac{H}{\omega} \cosh \frac{\omega}{H} x$ , což je rovnice řetězovky  $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ , kde  $a = \frac{H}{\omega}$  (Lukeš 2005, s. 33–34).

### 7.3.5 Trajektorie pvozu (křivka traktrix)

První formulace úlohy:

Na malém dvoře stojí přívěs za auto s pevnou ojí a s jednou nápravou. K jeho oji nacouvá osobní auto tak, že podélná osa automobilu je kolmá k podélné ose přívěsu. Řidič připojí přívěs, zařadí rychlost a souprava se od tohoto okamžiku pohybuje; automobil koná rovnoměrný přímočarý pohyb, přívěs ovšem nikoli, protože zatáčí. Matematicky vyjádřete pohyb středu nápravy přívěsu v závislosti na čase.



Obr. 7.4: Automobil s přívěsným vozíkem

Druhá formulace úlohy

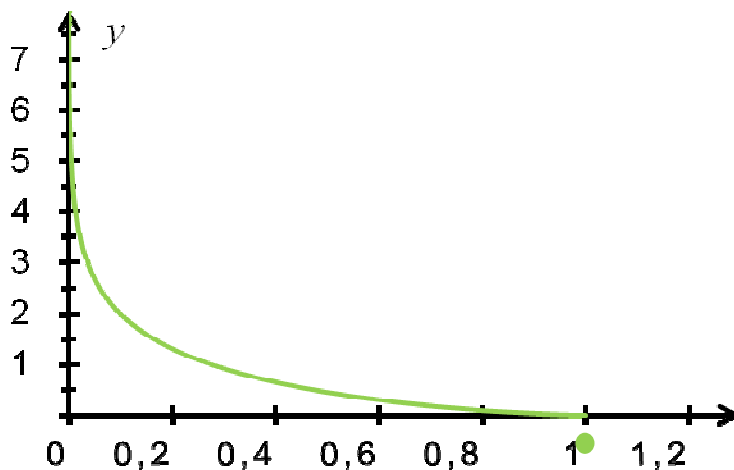
Molo v přístavišti má tvar obdélníkové lávky směřující kolmo ke břehu. U mola stojí loďka s lanem, za které může táhnout chodec (burlak) jdoucí po břehu. Loďka

tahem za lano připluje ke břehu a při tomto pohybu se otočí rovnoběžně s břehem, tedy kolmo ke svému původnímu směru.

Budeme se zabývat první formulací úlohy.

Upřesníme si zadání úlohy: Zavedeme systém souřadnic tak, že v čase  $t_0 = 0$  s podélnou osu automobilu ztotožníme s osou  $y$ , podélnou osu přívěsu ztotožníme s osou  $x$ . Přívěs má směr záporné orientace osy  $x$ , automobil má směr kladné orientace osy  $y$ . Měřítka osy  $x$  zvolíme tak, že střed nápravy přívěsu má jednotkovou souřadnici, tedy vzdálenost středu nápravy přívěsu od bodu připojení oje přívěsu k automobilu je 1 (j), viz Obr. 7.4.

Počáteční podmínky: Bod, v němž automobil je otočně spojen s pevnou ojí přívěsu, je v čase  $t_0 = 0$  s v počátku soustavy souřadnic a automobil se pohybuje konstantní rychlostí  $v_0$  po ose  $y$ . Střed nápravy přívěsu vybočí z osy  $x$  v místě o souřadnicích  $[1;0]$  a pohybuje se po křivce zvané traktrix.



Obr. 7.5: Traktrix

Lze ukázat, že k určení rovnice křivky vede diferenciální rovnice

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ počáteční podmínka pro střed nápravy přívěsu je } y(1) = 0.$$

Výsledek: Po úpravě získáme tvar  $dy = \left( -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$ . Řešením je rovnice křivky  $y = f(x) = \operatorname{arctgh} \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2}$  (Lukeš 2005, s. 28). Výsledný graf je zobrazen na Obr. 7.5.

### 7.3.6 Klouzání řetízku

Těžký homogenní řetízek je umístěn tak, že jeho část leží na hladkém vodorovném stole a zbytek délky  $a$  visí přes okraj stolu. Řetízek začne účinkem gravitace klouzat dolů, délka řetízku visícího přes okraj stolu v aktuálním čase je vyjádřena veličinou  $s$ . Za jak dlouho řetízek spadne ze stolu?

Silou, která způsobuje změnu pohybového stavu řetízku, je tíhová síla. Ta působí svisle dolů na visící část řetízku. Tato síla ovšem uvádí do pohybu celý řetízek, nejen jeho visící část.

Diferenciální rovnice vedoucí k řešení problému má tvar  $m \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{mg}{l} s$ . Po úpravě

získáme vztah  $\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{g}{l} s = 0$ . Obecné řešení dostaneme ve tvaru

$s = C_1 \cosh \sqrt{\frac{g}{l}} t + C_2 \sinh \sqrt{\frac{g}{l}} t$ . Z počátečních podmínek (pro  $t = 0$  s je  $s = a$ ,  $v = 0$

m/s) dostaneme závislost dráhy na čase  $s = a \cosh \sqrt{\frac{g}{l}} t$ .

Řetízek sklouzne ze stolu, když  $s = l$ , takže okamžik pádu určíme z rovnice

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \operatorname{argcosh} \frac{l}{a} = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 - a^2}}{a} \quad (\text{Janpolskij 1960, s. 146}).$$

Příklad: Řetízek délky  $l = 0,42$  m visí přes okraj stolu a vlivem gravitační síly sklouzává. Jakou dobu  $T$  se udrží řetízek na stole, když délka části řetízku, který visí přes okraj stolu, je  $a = 0,26$  m?

Využijeme vzorec  $T = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 - a^2}}{a}$ .

Dosadíme hodnoty zadaných veličin, takže  $T = \sqrt{\frac{0,42}{9,81}} \ln \frac{0,42 + \sqrt{0,42^2 - 0,26^2}}{0,26}$ .

Po vyčíslení získáme hledanou hodnotu  $T = 0,22$  s.

### 7.3.7 Ionizace plynu

Při procesu ionizace plynu působením ionizujícího záření, jehož intenzita je konstantní v čase, se za každou sekundu vytvoří  $q$  kladných iontů a zároveň také  $q$  záporných iontů ve zvoleném objemu plynu. Zároveň probíhá opačný proces (rekombinace), při němž iontů ubývá. Předpokládejme, že z množství  $n$  kladných iontů jich každou sekundu rekombinuje počet přímo úměrný druhé mocnině jejich počtu, přičemž koeficient úměrnosti  $\alpha$  ovšem závisí na druhu a podmínkách daného plynu.

Jak závisí počet iontů  $n$  na čase  $t$ ?

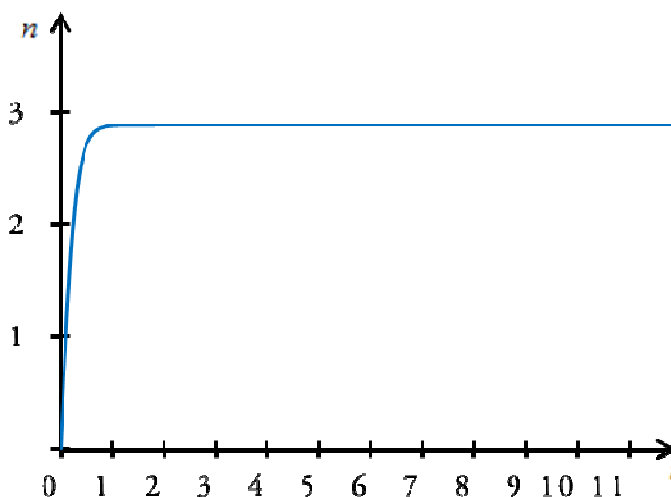
Řešíme diferenciální rovnici  $\frac{dn}{dt} = q - \alpha n^2$ . Tato rovnice má separované proměnné.

Po vyjádření dostáváme  $n = \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \operatorname{tgh}(\sqrt{\alpha q} t)$ , což je hyperbolická tangenta času (Janpolskij 1960).

Experiment:

Na základě výpisu funkce pro  $t = 0$  s až  $t = 12$  s sestrojíme graf závislosti času  $t$  na počtu iontů  $n$ . Výsledná závislost pro parametry  $q = 10$ ,  $\alpha = 1,2$  je zobrazena na Obr. 7.6.

Z výše uvedeného grafu je zřejmé, že závislost počtu iontů  $n$  na čase  $t$  je dána hyperbolickou tangentou.



Obr. 7.6: Závislost počtu iontů na čase

### 7.3.8 Množení bakterií

Předpokládejme nějakou kulturu bakterií. Bakterie se rozmnožují lineárně jejich aktuálnímu počtu. Současně produkují jed, jehož produkce je přímo úměrná množství jedu a množství bakterií, přičemž rychlost produkce jedu je lineární funkcí aktuálního množství bakterií.

Označíme si  $N$  množství bakterií v časovém okamžiku  $t$ . Ukazuje se, že množství bakterií nejprve roste s časem do nějaké maximální hodnoty  $M$ , pak začne klesat s časem až k nule.

Čas  $t$  budeme volit roven nule v okamžiku, kdy počet bakterií dosáhne maxima, tedy kdy  $N = M$ . Tedy při růstu počtu bakterií bude čas ještě záporný.

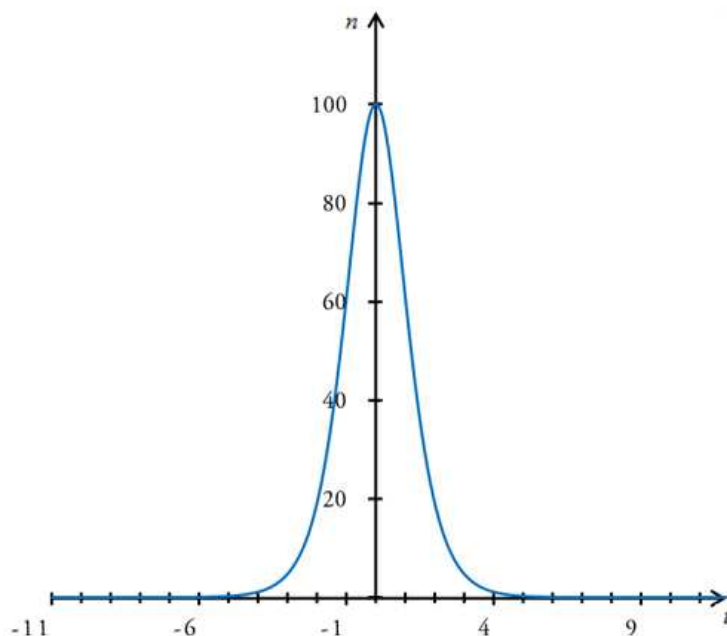
Úloha se řeší ze soustavy diferenciálních rovnic  $\frac{dN}{dt} = kN - k_1 N \kappa$ ,  $\frac{d\kappa}{dt} = k_2 N$ , kde

$\frac{dN}{dt}$  je časová derivace, tedy rychlost rozmnožování bakterií, a  $\frac{d\kappa}{dt}$  je časová deri-

vace, tedy rychlost produkce jedu,  $k_1$  a  $k_2$  jsou koeficienty úměrnosti dle konkrétní

bakteriální kultury. Vyjde vzorec  $N = \frac{M}{\cosh^2 \frac{kt}{2}}$  (Janpolskij 1960, s. 174).

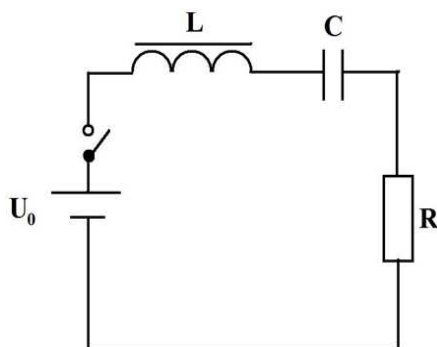
Příklad: Vyjádříme závislost množství bakterií na čase, když víme, že maximální množství bakterií  $M = 100$  a koeficient úměrnosti  $k = 1,4$ . Za pomoci MS Excelu jsme zobrazili hledanou závislost (viz Obr. 7.7).



Obr. 7.7: Závislost počtu bakterií na čase

### 7.3.9 Obvod s impedancí

Sériová soustava cívky, kondenzátoru a rezistance se připojí ke zdroji konstantního elektromotorického napětí, viz Obr. 7.8. Vzhledem k tomu, že impedance cívky a kondenzátoru závisí na čase, bude proud v obvodu také záviset na čase. Máme najít tuto závislost.



Obr. 7.8: RLC obvod

Podle Kirchhoffových zákonů platí rovnice  $L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_0^t I dt = U_0$ .

Zderivováním podle času dostaneme lineární diferenciální rovnici 2. stupně

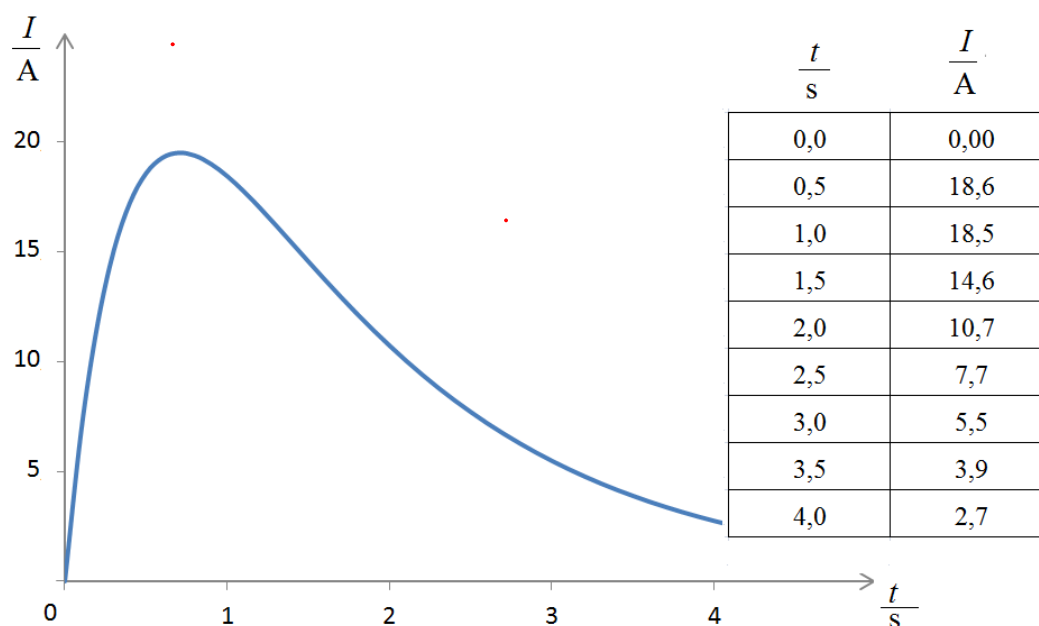
$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0. \text{ Označíme si alfu, betu jako } \alpha = \frac{R}{2L} \text{ a } \beta = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}$$

(Janpolskij 1960, s. 155).

Následně provedeme diskusi:

1) Pro  $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{CL}$  dostaneme  $I = \frac{U_0}{\beta L} e^{-\alpha t} \sinh \beta t$

Pro konkrétní hodnoty  $U_0 = 20 \text{ V}$ ,  $R = 0,8 \Omega$ ;  $L = 0,25 \text{ H}$ ;  $C = 2,30 \text{ F}$  je graf závislosti v Obr. 7.9. Jde o aperiodický děj.

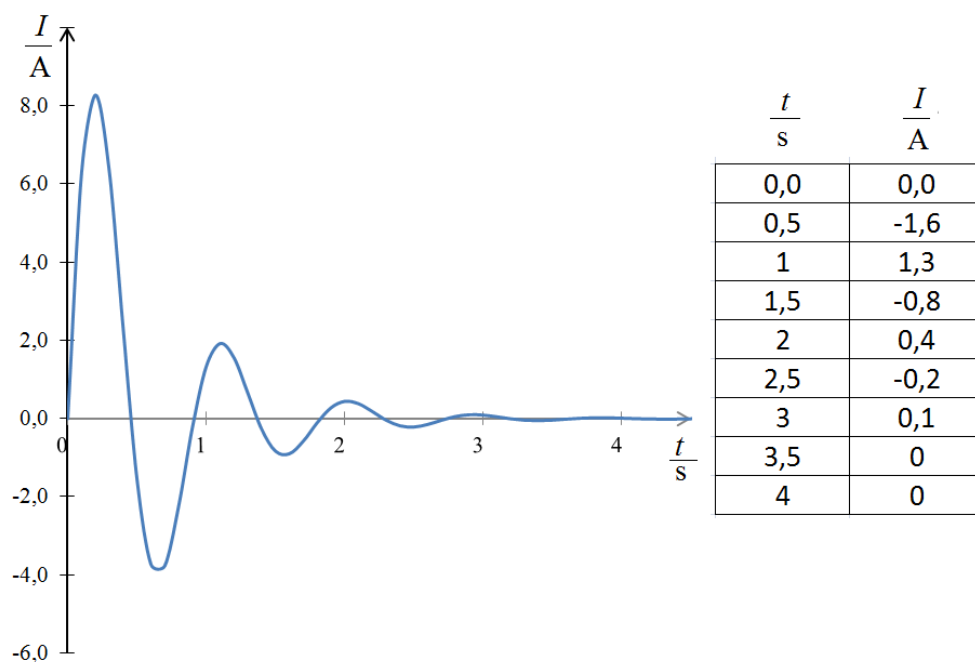


Obr. 7.9: Závislost proudu na čase, 1. větev diskuse

2) Pro  $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{CL}$  dostaneme  $I = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t$

Pro konkrétní hodnoty  $U_0 = 20 \text{ V}$ ,  $R = 0,8 \Omega$ ;  $L = 0,25 \text{ H}$ ;  $C = 0,08 \text{ F}$  je graf závislosti v Obr. 7.10. Jde o tlumené kmity.





Obr. 7.10: Závislost proudu na čase, 2. větev diskuse

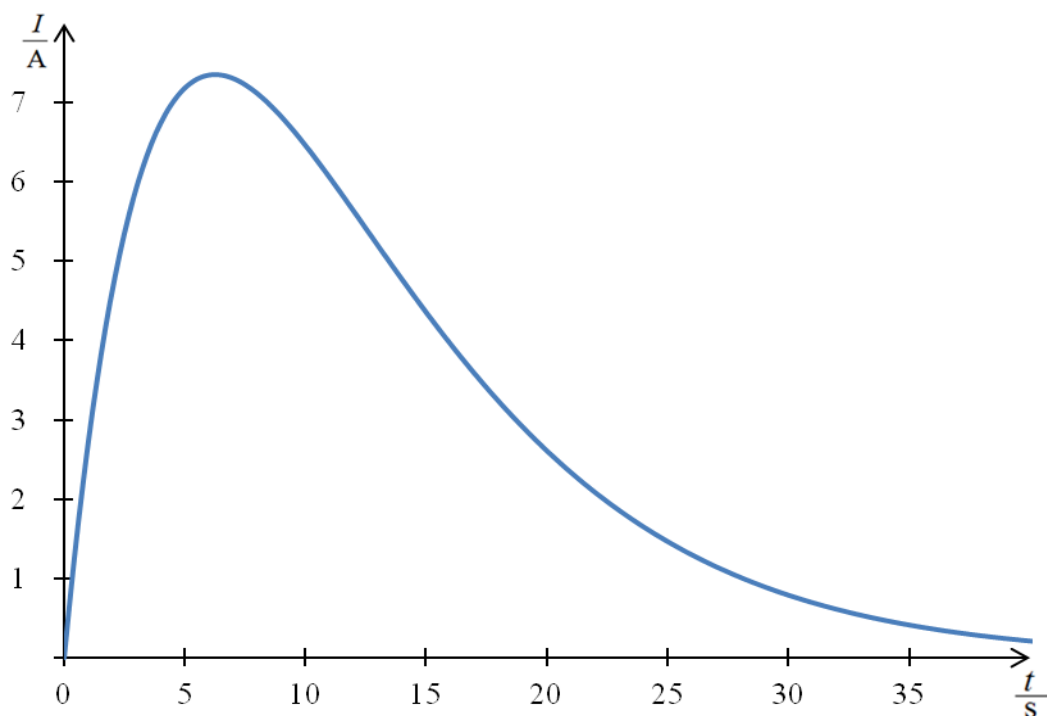
Zatímco v 1. větvi diskuse vyjde vzorec s hyperbolickou funkcí, ve 2. větvi vyjde podobný vzorec jako v 1. větvi, v němž ale figuruje funkce goniometrická.

3) Pro  $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{CL}$  dostaneme  $I = \frac{U_0}{L} t e^{-\alpha t}$

Pro konkrétní hodnoty  $U_0 = 0,8 \text{ V}$ ,  $R = 0,8 \text{ } \Omega$ ;  $L = 0,25 \text{ H}$ ;  $C = 156 \text{ F}$  graf závislosti v Obr. 7.11 a vybrané hodnoty uvádí Tabulka 7.1. Soudíme, že ve skutečném elektrickém obvodu nelze dosáhnout přesné rovnosti z podmínky diskuze, takže reálně tento případ vůbec nenastane.

$\frac{t}{s}$	0.0	5	10	15	20	25	30	35
$\frac{I}{A}$	0,0	7,2	6,5	4,4	2,6	1,5	0,8	0,4

Tabulka 7.1 Závislost proudu na čase, třetí větev diskuse



Obr. 7.11: Závislost proudu na čase, třetí větev diskuse

## 7.4 Shrnutí

a) Ukázali jsme, v jak rozličných oborech se hyperbolické a hyperbolometrické závislosti uplatňují.

b) Každý zápis výrazu s exponenciálními funkcemi lze rovnocenně přepsat funkcemi hyperbolickými. Každý zápis výrazu s logaritmickými funkcemi lze rovnocenně přepsat funkcemi hyperbolometrickými. Každý zápis výrazu s hyperbolickými funkcemi lze rovnocenně přepsat funkcemi exponenciálními. Každý zápis výrazu s hyperbolometrickými funkcemi lze rovnocenně přepsat funkcemi logaritmickými. Z tohoto hlediska lze zavedení hyperbolických a hyperbolometrických funkcí pokládat až za zbytečnost.

Avšak přehlednost, jednoduchost, snadnost vyčíslení a třeba i zapamatovatelnost zápisu je v konkrétních případech velmi rozdílná.

c) Jak jsme ukázali v posledním příkladu, podobnost výsledků v diskusi se použitím hyperbolických a hyperbolometrických funkcí někdy zásadním způsobem zvýrazní.

## 8 Závěr

V této práci jsme ukázali, jaký má téma hyperbolických a hyperbolometrických funkcí didaktický potenciál. Domníváme se, že hyperbolické funkce jsou vhodným tématem k procvičení dovedností a znalostí žáků ohledně celého tématu funkcí a dále tématu rovnic a nerovnic. Žáci si nejen ožíví znalosti a dovednosti, které mají ovládat ze základního kurzu matematiky. Navíc dostanou možnost si tyto znalosti a dovednosti vyzkoušet a aplikovat je na pro ně novém tématu, které však navíc vhodně propojuje předchozí znalosti ohledně kvadratických, exponenciálních nebo například logaritmických funkcí.

V průběhu testování se nám potvrdilo, že žákům nečiní problém samotné téma hyperbolických funkcí, ale z jejich písemných výstupů bylo patrné, že žákovské chyby souvisely především s látkou základního kurzu matematiky. Připomínáme, že našim cílem bylo využít tématu hyperbolických funkcí především k zopakování a procvičování dovedností, které žáci mají ovládat ze základního kurzu matematiky.

Jsme přesvědčeni, že námi nabídnutá a vyzkoušená koncepce výuky nabízí široké možnosti k procvičování a ujednacení znalostí žáků ze základního kurzu matematiky a splňuje tedy požadavky, které jsme na tuto koncepci v první řadě kladli.

Součástí této práce je úspěšně vyzkoušený koncept výuky tématu hyperbolických funkcí včetně materiálů k výuce samotné a vize na pokračování a rozšíření tohoto konceptu. Práce dále obsahuje učební text, který má sloužit jako podpora pro žáky, aby se měli v průběhu kurzu kam podívat, když jim nějaká problematika nebude jasná. V případě, že bude žák chybět na hodině, si pomocí tohoto učebního textu může danou problematiku nastudovat samostatně.

Domníváme se, že význam této práce spočívá především v tom, že ukazuje možnosti konkrétního využití tohoto tématu ve výuce matematiky na střední škole. Obrazně řečeno, lze mluvit o první vlaštovce, která má upozornit na význam hyperbolických funkcí především z hlediska didaktiky matematiky.

Do budoucna tato práce nabízí možnosti detailněji zkoumat potenciál začlenění tohoto méně standardního tématu do běžné výuky matematiky a bylo by jistě možné a zajímavé se také zabývat úspěšností žáků (s ohledem na témata jako jsou funkce, inverzní funkce, rovnice a nerovnice), kteří by prošli kurzem představeným v této práci, oproti žákům, kteří by si znalosti a dovednosti ohledně funkcí procvičovali pomocí výrazněji konvenčnějších metod. Takováto analýza však přesahuje námi vytyčené cíle, neboť z hlediska objektivních výsledků takového výzkumu by bylo zapotřebí především dostatečného výzkumného vzorku.

Jsme však přesvědčeni, že myšlenka na začlenění tématu hyperbolických funkcí do výuky na středních školách je v širším měřítku realizovatelná. Domníváme se, že toto téma má výrazný potenciál zkvalitnit a obohatit samotný proces výuky především v oblasti funkcí. Věříme, že se nám podařilo čtenáře touto diplomovou prací přesvědčit o výhodách tématu hyperbolických a hyperbolometrických funkcí ve výuce matematiky a případně ho i inspirovat k dalšímu možnému využití tohoto tématu na střední škole.

## 9 Seznam použitých informačních zdrojů

BARNETT, Janet Heine. 2004. Enter, stage center: The early drama of the hyperbolic functions. *Mathematics Magazine*. Dostupné z:

<http://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/classroom-capsules-and-notes/enter-stage-center-the-early-drama-of-the-hyperbolic-functions>

BARTSCH, Hans Jochen. 2002. *Matematické vzorce*. Praha: Mladá fronta. ISBN 80-204-0607-7.

DĚMIDOVÍČ, Boris Pavlovič, 2003. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Havlíčkův Brod: Nakladatelství Fragment. ISBN 80-7200-587-1.

GÜNTHER, Siegmund, 1881. *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten hyperbelfunktionen*. Halle a/S: Verlag von Louis Nebert. Dostupné z:

<https://archive.org/details/dielehrevondeng00fortgoog>

HANZALOVÁ, Pavla, 2013. *Funkce jedné proměnné na střední škole*. Hradec Králové. Diplomová práce. Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta.

JANPOLSKIJ, A. R., 1960. *Giperboličeskije funkcii*, Moskva: Gosudarstvennye izd. fiziko-matematičeskij literatury. Dostupné z:

<http://www.twirpx.com/file/280254/>

KACMARYNSKI, J. P., 1931. The catenary. State University of Iowa, Department of Mathematics. Dostupné z: <http://ir.uiowa.edu/etd/2804/>

LAMBERT, Johann Heinrich, 1770. Observations trigonometriques, *Histoire de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres*. Dostupné z:

[https://books.google.cz/books?id=SpQQw-Y739IC&hl=cs&source=gbs\\_navlinks\\_s](https://books.google.cz/books?id=SpQQw-Y739IC&hl=cs&source=gbs_navlinks_s)

LARSON, Ron; EDWARDS, Bruce. 2014. *Calculus of a Single Variable: Early Transcendental Functions*. Cengage Learning.

LUKEŠ, Petr, 2005. *Hyperbolické a hyperbolometrické funkce v praxi*. Brno. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta.

POLÁK, Josef, 1988. *Názvy a značky školské matematiky*, Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

REKTORYS, Karel, 1981. *Přehled užití matematiky*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury.

RICCATI, Vincenzo, 1757. *Opusculorum Ad res Physicas et Mathematicas pertinentium*. Bononiae: Apud Laelium a Vulpe Instituti Scientiarum Typographum.

Dostupné z:

[http://wwwuser.gwdg.de/~subtypo3/gdz/pdf/PPN61578674X/PPN61578674X\\_\\_\\_\\_LOG\\_0003.pdf](http://wwwuser.gwdg.de/~subtypo3/gdz/pdf/PPN61578674X/PPN61578674X____LOG_0003.pdf)

STEWART, James, 2015. *Calculus: Early Transcendentals*. Cengage Learning.

ZILL, Dennis G.; WRIGHT, Warren S., 2010. *Calculus: Early Transcendentals*. Jones & Bartlett Publishers.

## 10 Seznam obrázků

Obr. 1.1: Graf funkcí $f : y = \cosh x$ (řetězovka) a $g : y = x^2 + 1$ (parabola) .....	13
Obr. 1.2: Riccatiho značení hyperbolických funkcí .....	15
Obr. 1.3: Lambertovo značení .....	16
Obr. 2.1: Katedrála Santa Maria del Fiore .....	18
Obr. 2.2: Gateway Arch .....	19
Obr. 2.3: Brněnské výstaviště, Pavilon A .....	20
Obr. 2.4: Oceánská vlna .....	22
Obr. 2.5: Řetězovkové trakční vedení .....	22
Obr. 3.1: Graf funkce sinus hyperbolický $y = \sinh x$ .....	24
Obr. 3.2: Graf funkce argument sinu hyperbolického $y = \operatorname{argsinh} x$ .....	25
Obr. 3.3: Graf funkce kosinus hyperbolický $y = \cosh x$ .....	25
Obr. 3.4: Graf funkce $f : y = \cosh x$ a k ní inverzní relace $g : y = \operatorname{Argcosh} x$ .....	26
Obr. 3.5: Graf funkce argument hyperbolického kosinu $g : y = \operatorname{argcosh} x$ .....	26
Obr. 3.6: Graf funkce $g : y = -\operatorname{argcosh} x$ .....	27
Obr. 3.7: Graf funkce tangens hyperbolický $y = \operatorname{tgh} x$ .....	27
Obr. 3.8: Graf funkce argument tangenty hyperbolické $y = \operatorname{argtgh} x$ .....	28
Obr. 3.9: Graf funkce kotangens hyperbolický $y = \operatorname{cotgh} x$ .....	28
Obr. 3.10: Graf funkce argument kotangenty hyperbolické $y = \operatorname{argcotgh} x$ .....	29
Obr. 3.11: Graf funkce sekans hyperbolický $y = \operatorname{sech} x$ .....	29
Obr. 3.12: Graf funkce argument sekanty hyperbolické $y = \operatorname{argsech} x$ .....	30
Obr. 3.13: Graf funkce kosekans hyperbolický $y = \operatorname{cosech} x$ .....	30
Obr. 3.14: Graf funkce argument kosekanty hyperbolické $y = \operatorname{argcosech} x$ .....	31
Obr. 4.1: Ukázka tvorby grafů funkcí v MS Excel .....	37
Obr. 4.2: Správce názvů .....	37
Obr. 4.3: Šablony funkcí $y = \sinh x$ a $y = \cosh x$ .....	39
Obr. 4.4: Zrušení propojení na soubor v MS Word 2007 .....	40
Obr. 4.5: Orientovaný úhel vyjádřený obsahem výseče .....	43
Obr. 4.6: Obsah hyperbolické výseče .....	44
Obr. 4.7: Graf funkcí $f : y = \sinh x$ a $g : y = \cosh x$ .....	45
Obr. 4.8: Graf funkce $f : y = \sinh x$ a k ní inverzní funkce $g : y = \operatorname{argsinh} x$ .....	46
Obr. 4.9: Graf funkcí $f : y = \operatorname{argcosh} x$ a $g : y = -\operatorname{argcosh} x$ .....	47
Obr. 4.10: Značení krajních bodů intervalů a křivek .....	49
Obr. 4.11: Funkce dána rovnicí $y = \operatorname{sech} x$ a oborem proměnné $\mathcal{O} = \langle -1; 2 \rangle$ .....	50

Obr. 4.12: Funkce $y = \operatorname{cotgh} x$ a oborem proměnné $\mathcal{O} = (-\infty; -3) \cup \langle 0; 3)$ .....	51
Obr. 4.13: Funkce dána rovnicí $y = \operatorname{argtgh} x$ a oborem proměnné $(-\infty; 0,5)$ .....	52
Obr. 4.14: Funkce dána rovnicí $y = -e^{-x} - e^x$ a oborem proměnné $(-\infty; -1) \cup \{1\}$ .....	53
Obr. 4.15: Graf funkce $f : y = \sinh x$ a $g : y = \sinh(x-3)$ .....	54
Obr. 4.16: Graf funkce $f : y = \cosh x$ a $g : y = 2 + \cosh x$ .....	54
Obr. 4.17: Grafy funkcí $f : y = \operatorname{argsinh} x$ , $g : y = \operatorname{argsinh}(x-1)$ , $h : y = 3 + \operatorname{argsinh}(x-1)$ .....	55
Obr. 4.18: Grafy funkcí $f : y = \operatorname{tgh} x$ , $g : y = -3 \operatorname{tgh} x$ a $h : y = 2 \operatorname{tgh} x$ .....	56
Obr. 4.19: Grafy funkcí $f : y = -3 + \operatorname{cosech} x$ , $g : y =  -3 + \operatorname{cosech} x $ .....	57
Obr. 4.20: Grafy funkcí $f : y = \sinh x$ , $g : y = \sinh x $ .....	58
Obr. 4.21: Grafy funkcí $f : y = \operatorname{tgh}(x+2)$ , $g : y = \operatorname{tgh} x+2 $ .....	59
Obr. 4.22: Graf funkce $g : y = \sinh x$ .....	60
Obr. 4.23: Graf funkce $g : y = \sinh(3x)$ .....	60
Obr. 4.24: Graf funkce $f : y = \sinh x$ , $g : y = \sinh(3x)$ .....	61
Obr. 4.25: Graf funkcí $f : y = \operatorname{argcosh} x$ , $g : y = \operatorname{argcosh}(2x)$ a $h : y = \operatorname{argcosh}(-2x)$ .....	61
Obr. 4.26: Grafické řešení rovnice $-\sinh(x-1) =  \sin x  + 2$ .....	63
Obr. 4.27: Grafické řešení nerovnice $-2 - \operatorname{argcosh} x-2  > x^3 + 1$ .....	64
Obr. 5.1: Zavedení goniometrických funkcí jednotkovou kružnicí .....	66
Obr. 5.2: Význam veličiny $\alpha$ jako velikosti oblouku kruhové výseče .....	67
Obr. 5.3: Význam veličiny $\alpha$ jako dvojnásobku obsahu kruhové výseče .....	67
Obr. 5.4: Jednotková rovnoosá hyperbola .....	68
Obr. 5.5: Obsah hyperbolické výseče .....	68
Obr. 5.6: Jednotková rovnoosá hyperbola a jednotková kružnice .....	68
Obr. 5.7: Grafy funkcí $f : y = \frac{e^x}{2}$ , $g : y = -\frac{e^{-x}}{2}$ a $h : y = \sinh x$ .....	69
Obr. 5.8: Graf funkcí $f : y = \frac{e^x}{2}$ , $g : y = \frac{e^{-x}}{2}$ a $h : y = \cosh x$ .....	70
Obr. 5.9: Grafy funkcí $f : y = \frac{1}{x}$ a $g : y = \operatorname{cosech} x$ .....	72
Obr. 5.10: Řetězovka .....	80
Obr. 6.1: Chybný graf funkce $y = \cosh x$ procházející počátkem souřadnic .....	90
Obr. 6.2: Zaokrouhlování .....	90
Obr. 6.3: Zaokrouhlování .....	90



---

Obr. 6.4: Žák sestrojuje inverzní relace, nikoli funkce .....	93
Obr. 6.5: Chybné řešení.....	95
Obr. 6.6: Chybné řešení.....	96
Obr. 6.7: Chybné určení oboru kořenů nerovnice jako by se jednalo o rovnici .....	96
Obr. 6.8: Chybné řešení absolutní hodnoty argumentu funkce .....	97
Obr. 6.9: Chybné řešení absolutní hodnoty argumentu funkce .....	98
Obr. 6.10 Chybně posunutá funkce $y =  \sinh x  - 1$ .....	99
Obr. 6.11: Nechce mi fungovat kalkulačka .....	101
Obr. 6.12a: Chybné grafické řešení.....	102
Obr. 6.12b: Chybné grafické řešení .....	103
Obr. 6.13: Chybné grafické řešení nerovnice.....	104
Obr. 6.14: Správné grafické řešení nerovnice.....	104
Obr. 6.15: Špatný zápis intervalu oboru kořenů .....	105
Obr. 6.16: Jiný špatný zápis intervalu oboru kořenů.....	105
Obr. 7.1: Obsah rovinného obrazce .....	110
Obr. 7.2: Kulička v trubce.....	116
Obr. 7.3: Řetězovka a řetězovkové vedení .....	117
Obr. 7.4: Automobil s přívěsným vozíkem .....	118
Obr. 7.5: Traktrix .....	119
Obr. 7.6: Závislost počtu iontů na čase .....	122
Obr. 7.7: Závislost počtu bakterií na čase .....	123
Obr. 7.8: RLC obvod.....	123
Obr. 7.9: Závislost proudu na čase, 1. větev diskuse .....	124
Obr. 7.10: Závislost proudu na čase, 2. větev diskuse .....	125
Obr. 7.11: Závislost proudu na čase, třetí větev diskuse.....	126

## 11 Seznam tabulek

Tabulka 3.1 Přehled značení hyperbolických funkcí .....	33
Tabulka 3.2 Přehled značení hyperbolických funkcí .....	34
Tabulka 7.1 Závislost proudu na čase, třetí větev diskuse.....	125

## 12 Seznam příloh

### 12.1 Elektronické přílohy

Příloha č. 1: Úvodní prezentace

Příloha č. 2: Soubor (ve formátu \*.doc) k vytvoření šablon hyperbolického sinu a kosinu

Příloha č. 3: Graf sinu hyperbolického v Geogebře pomocí výpisu z funkce

Příloha č. 4: Graf kosinu hyperbolického v Geogebře pomocí výpisu z funkce

Příloha č. 5: Soubory vytvářené v hodině referujícími žáky v Geogebře (funkce tangens hyperbolický, kotangens hyperbolický a sekans hyperbolický). Grafy vytvořené v Geogebře pomocí tabulky a výpočtu přes exponenciální tvar

Příloha č. 6: Porovnání řetězovky s parabolou v Geogebře. Pomocí táhla lze měnit koeficient v rovnici řetězovky

Příloha č. 7: Žákovské soubory použité k referátům na téma posunutí a absolutní hodnota hyperbolických funkcí

Příloha č. 8: Program k vytváření grafů funkcí v MS Excel (ve formátu xlsx)

Příloha č. 9: Program na porovnání hyperbolických a goniometrických funkcí

Příloha č. 10: Žákovské řešení prověrek vytvořené z naskenovaných prací žáků

Příloha č. 11: Materiály z pokusu pracovat s hyperbolickými funkcemi ve spojení s infinitezimálním počtem

Příloha č. 12: Ukázka výstupu z realizované výuky daného tématu hyperbolických funkcí z minulosti

Příloha č. 13: Přehled hyperbolických a hyperbolometrických funkcí v HTML

Příloha č. 14: Řešení rovnic a nerovnic v Geogebře

Příloha č. 15: Učební text pro žáky k tématu hyperbolických funkcí ve formátu pdf

## 12.2 Papírové přílohy

Příloha č. 16: Přehled klasifikace z prověrek.

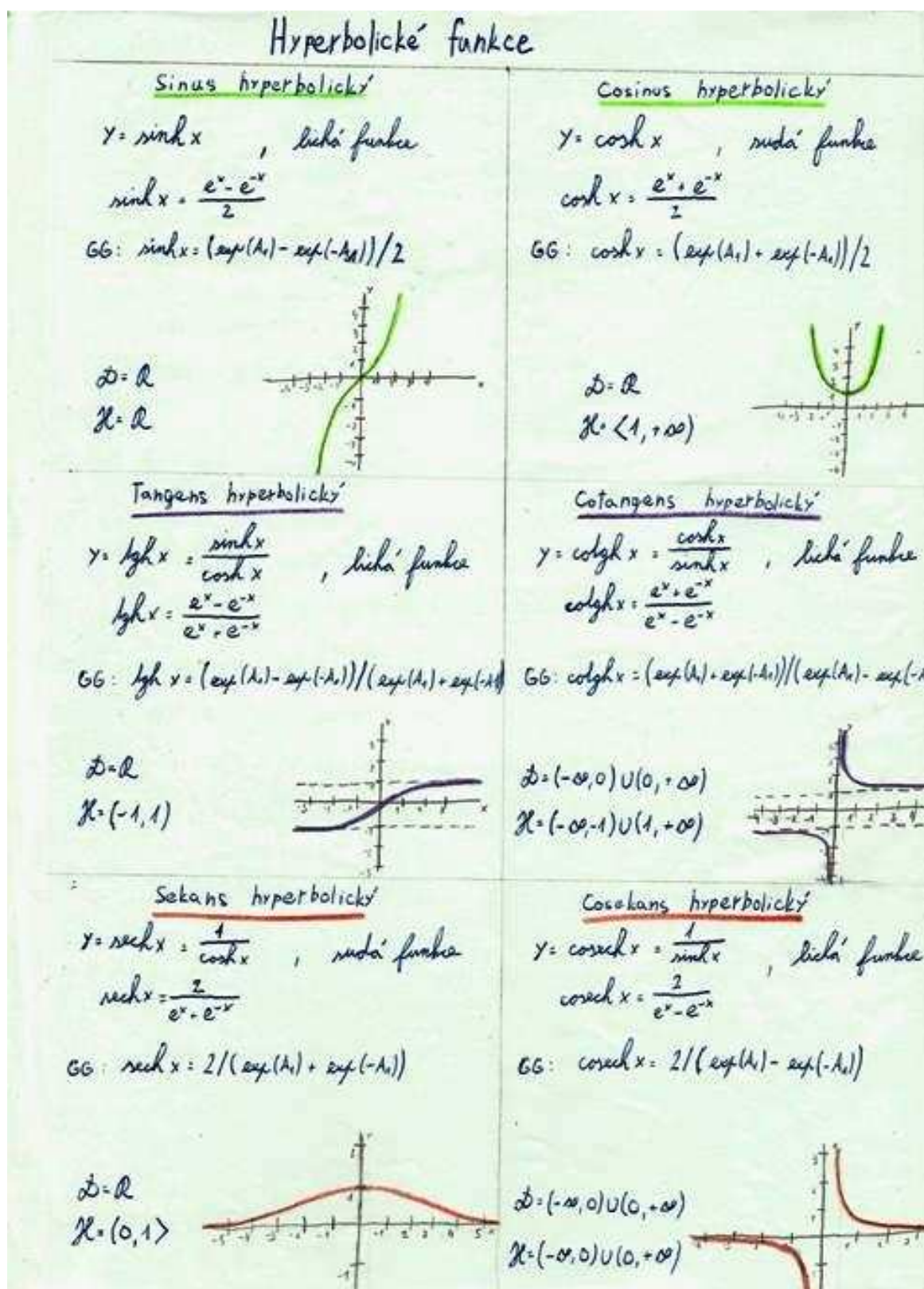
Příloha č. 17: Ukázka žákovského výpisu hyperbolických funkcí v sešitě.

Příloha č. 18: Ukázka žákovského výpisu hyperbolometrických funkcí v sešitě.

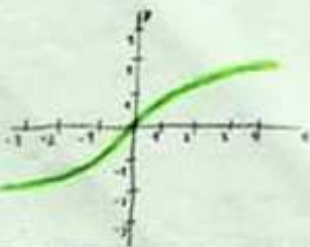
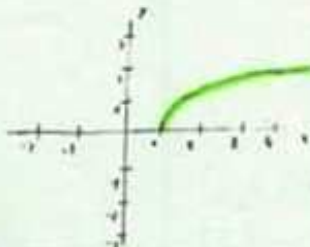

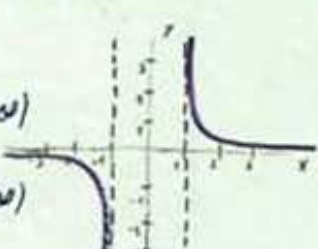
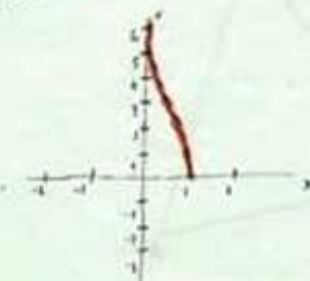
Příloha č. 16: Přehled klasifikace z prověrek

Klasifikace z prověrek					
Váha známky	4x	4x	4x	5x	12x
Obsah prověrky	Graf funkce $\cosh x$	3 grafy hyperbolických funkcí	4 grafy hyperbolometrických funkcí	4 rovnice/nerovnice	
Časová dotace prověrky	13'	13'	20'	20'	45'
Označení žáka pro účely tohoto výzkumu	1. prověrka	2. prověrka	3. prověrka	4. prověrka	Písemná práce
1	2	2	2	3	2
2	4	1	1		2
3	3	3	3	1	4
4	2	1		2	3
5	3	2	4	4	4
6	2	2	3	3	1
7	2	1	2	5	4
8	2	1	2	3	2
9	1	1	2	1	1
10	2	1	1	1	3
11	1	1	1	1	1
12	1	1	2	1	1
13	3	1	1	1	2
14	1	1		1	1
15	5	3	5	3	3
16	4	1	2	2	2
17	1	1	1	3	2
18	2	3	2	3	1
19	2	3	3	2	4

Příloha č. 17: Ukázka žákovského přehledu hyperbolických funkcí v sešitě (hodnocená domácí práce)



Příloha č. 18: Ukázka žakovského přehledu hyperbolometrických funkcí v sešitě  
(hodnocená domácí práce)

$\mathcal{D} = \mathbb{R}$ $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ 	$\mathcal{D} = \langle 1, +\infty \rangle$ $\mathcal{H} = \langle 0, +\infty \rangle$ 
<u>Argument tangenty hyperbolicke</u> $y = \operatorname{arctgh} x$ , lichá funkce $\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$ GG: $\operatorname{arctgh} x = (\ln((1+x)/(1-x)))/2$	<u>Argument cotangenty hyperbolicke</u> $y = \operatorname{arccoth} x$ , lichá funkce $\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right)$ GG: $\operatorname{arccoth} x = (\ln((x+1)/(x-1)))/2$
$\mathcal{D} = (-1, 1)$ $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ 	$\mathcal{D} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ $\mathcal{H} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 
<u>Argument sekanty hyperbolicke</u> $y = \operatorname{arcsech} x$ $\operatorname{arcsech} x = \frac{1}{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}$ GG: parami parametru	<u>Argument cosekanty hyperbolicke</u> $y = \operatorname{arccsch} x$ , lichá funkce $\operatorname{arccsch} x = \frac{1}{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}$ GG parami parametru
$\mathcal{D} = (0, 1)$ $\mathcal{H} = \langle 0, +\infty \rangle$ 	$\mathcal{D} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $\mathcal{H} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 